Material Teórico - Módulo Teorema de Pitágoras e Aplicações

Algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras - Parte 2

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de abril de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Algumas aplicações simples

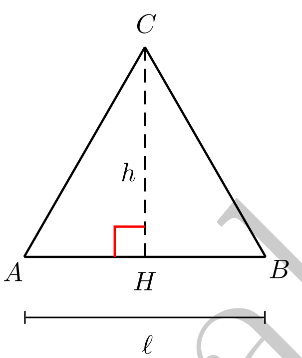
Iniciamos esta aula apresentando algumas relações geométricas simples, as quais são aplicações diretas do Teorema de Pitágoras.

Exemplo 1. *Seja ABC um triângulo equilátero de lado ℓ e altura h. Então*

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Solução. Seja H o pé da perpendicular ao lado AB, passando por C (veja a figura a seguir). Então AHC é um triângulo retângulo cujos catetos medem h e $\frac{\ell}{2}$ e cuja hipotenusa mede ℓ. Desse modo, utilizando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\begin{aligned}
\ell^2 &= \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{\ell^2}{4} + h^2 \\
&\Longrightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \\
&\Longrightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{2} \\
&\Longrightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$



□

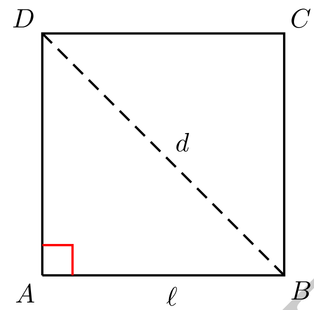
Exemplo 2. *Seja $ABCD$ um quadrado de lado ℓ e seja d a medida da sua diagonal. Então*

$$d = \ell\sqrt{2}.$$

Solução. Suponhamos, sem perda de generalidade, que as diagonais do quadrado são AC e BD. Então, ABD é um triângulo retângulo cujos catetos medem ℓ e cuja hipotenusa mede d (veja a próxima figura). Assim,

$$\begin{aligned}
d^2 = \ell^2 + \ell^2 &\Longrightarrow d^2 = 2\ell^2 \\
&\Longrightarrow d = \ell\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

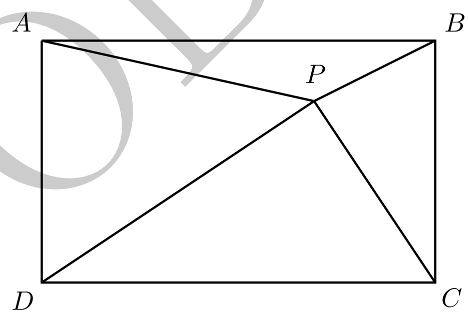
□



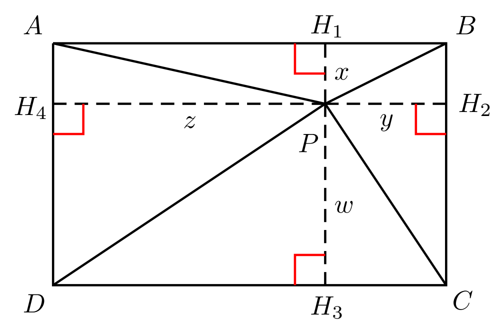
Vejamos mais algumas aplicações do Teorema de Pitágoras:

Exemplo 3. *Seja $ABCD$ um retângulo de diagonais AC e BD e P um ponto em seu interior. Mostre que*

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2.$$



Solução. Sejam H_1, H_2, H_3 e H_4, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P aos lados AB, BC, CD e AD (veja a figura abaixo).



Para simplificar a notação, denotemos $\overline{PH_1} = x$, $\overline{PH_2} = y$, $\overline{PH_3} = z$ e $\overline{PH_4} = w$. Desse modo, o triângulo PH_1A é retângulo, com catetos e hipotenusa medindo, respectivamente, x, z e $\overline{PA}$. Logo, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{PA}^2 = x^2 + z^2.$$

Observando, na mesma figura, os triângulos retângulos PBH_1, PCH_2 e PDH_3, vemos que argumentos análogos ao anterior nos permitem concluir que

$$\overline{PB}^2 = x^2 + y^2,$$

$$\overline{PC}^2 = y^2 + w^2$$

e

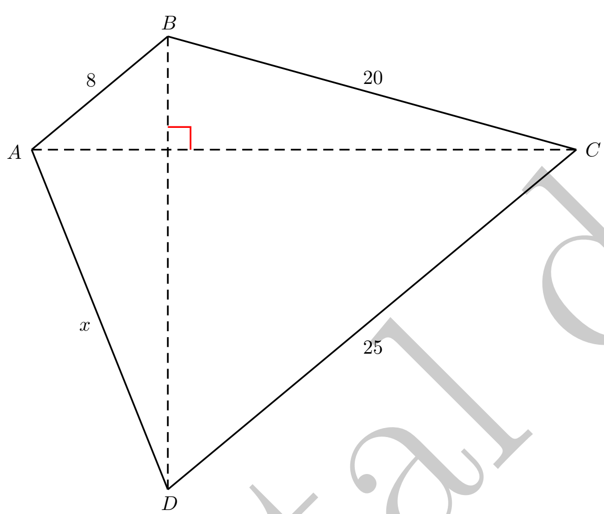
$$\overline{PD}^2 = z^2 + w^2.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= (x^2 + z^2) + (y^2 + w^2) \\ &= (x^2 + y^2) + (z^2 + w^2) \\ &= \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2. \end{aligned}$$

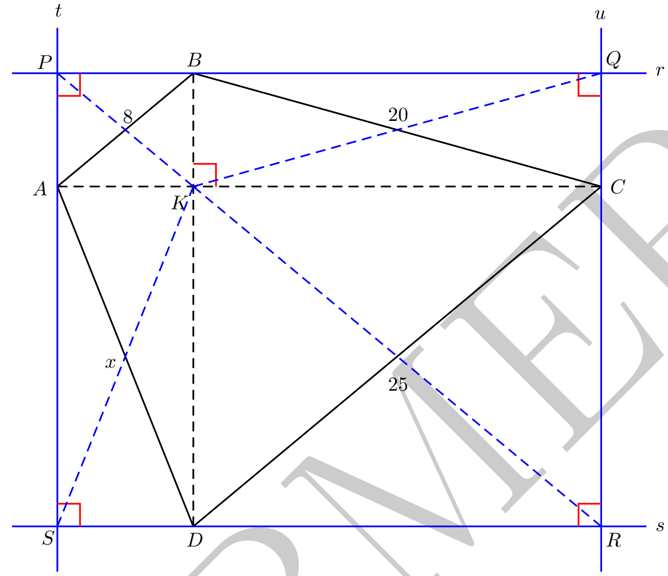
□

Exemplo 4. *As diagonais do quadrilátero $ABCD$ desenhado na figura abaixo são perpendiculares. São dados $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 20$ e $\overline{CD} = 25$. Encontre a medida do lado AD.*



Solução. Sejam r e s retas paralelas à diagonal AC, passando por B e D, respectivamente, e t e u retas paralelas à diagonal BD, passando por A e C, também respectivamente (acompanhe na figura a seguir). Denotemos por $P = r \cap t$, $Q = r \cap u$, $R = s \cap u$, $S = s \cap t$ e $K = AC \cap BD$.

Veja que $r \parallel AC$, $t \parallel BD$ e $AC \perp BD$, logo, $r \perp t$. Analogamente, temos $r \perp u$, $s \perp t$ e $s \perp u$. Assim, $PQRS$ é um retângulo. Utilizando o mesmo raciocínio, concluímos que os quadriláteros $KAPB$, $KBQC$, $KCRD$ e $KDSA$ também são retângulos. Logo, $\overline{KP} = \overline{AB} = 8$, pois KP e AB são as diagonais do retângulo $KAPB$ e, analogamente, $\overline{KQ} = \overline{BC} = 20$, $\overline{KR} = \overline{CD} = 25$ e $\overline{KS} = \overline{AD} = x$.



Portanto, utilizando o resultado visto no exemplo anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{KP}^2 + \overline{KR}^2 = \overline{KS}^2 + \overline{KQ}^2 &\Longrightarrow 8^2 + 25^2 = x^2 + 20^2 \\ &\Longrightarrow x^2 = 64 + 625 - 400 \\ &\Longrightarrow x^2 = 289 \\ &\Longrightarrow x = 17. \end{aligned}$$

□

2 A recíproca do Teorema de Pitágoras

Nesta seção, apresentamos a recíproca do Teorema de Pitágoras:

Proposição 5. *Se a, b e c são números reais positivos que satisfazem $a^2 = b^2 + c^2$, então a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo ABC retângulo em A, com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.*

Prova. De fato, como $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos

$$b^2 < b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow b < a < a + c,$$

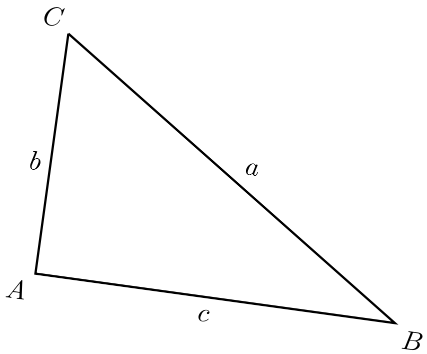
$$c^2 < b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow c < a < a + b$$

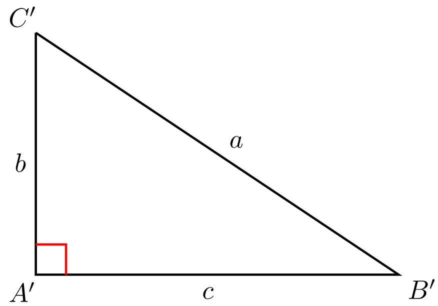
e

$$a^2 = b^2 + c^2 < b^2 + c^2 + 2bc = (b + c)^2 \Longrightarrow a < b + c.$$

Portanto, podemos considerar um triângulo ABC tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Agora, podemos construir, também, um triângulo $A'B'C'$, retângulo em A', tal que $\overline{A'C'} = b$ e $\overline{A'B'} = c$. Uma vez feito isso, o Teorema de Pitágoras fornece





$$\overline{B'C'}^2 = b^2 + c^2.$$

Mas, como $a^2 = b^2 + c^2$, concluímos que $\overline{B'C'}^2 = a^2$, ou seja,

$$\overline{B'C'} = a.$$

Portanto, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes (pelo caso LLL), de sorte que $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90°$. Logo, ABC é retângulo em A. □

3 A fórmula de Herão

Nesta seção, revisitamos um importante resultado sobre áreas, conhecido como a fórmula de Herão, a qual permite o cálculo da área de um triângulo conhecendo somente as medidas dos seus lados (e não um lado e o comprimento da altura correspondente a ele).

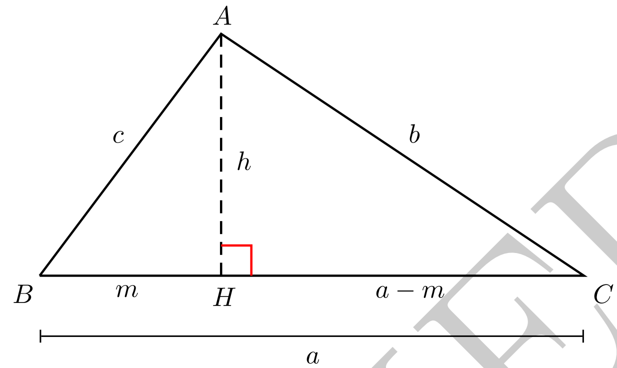
No módulo "Áreas de figuras Planas", provamos a fórmula de Herão utilizando a Lei dos Cossenos. Dessa vez, ela será abordada utilizando somente o Teorema de Pitágoras.

Teorema 6 (Fórmula de Herão). *A área de um triângulo ABC cujos lados medem $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ é dada pela fórmula*

$$[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

em que $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro de ABC.

Prova. Como ABC tem pelo menos dois ângulos agudos, podemos supor $A\widehat{B}C < 90°$ e $A\widehat{C}B < 90°$. Dessa forma, o pé H da altura baixada de A à reta suporte do lado



BC está situado sobre o lado BC. Denotando $h = \overline{AH}$ e $m = \overline{BH}$, temos $\overline{CH} = a - m$ (veja a figura).

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABH, obtemos $c^2 = m^2 + h^2$, o que acarreta $m^2 = c^2 - h^2$ e $h^2 = c^2 - m^2$. Por outro lado, outra vez aplicando o Teorema de Pitágoras, mas agora ao triângulo ACH, e fazendo as substituições $h^2 = c^2 - m^2$ e $m^2 = c^2 - h^2$, além de algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned}
& b^2 = h^2 + (a-m)^2 \\
\Longrightarrow\; & b^2 = c^2 - \cancel{m^2} + a^2 - 2am + \cancel{m^2} \\
\Longrightarrow\; & 2am = a^2 + c^2 - b^2 \\
\Longrightarrow\; & (2am)^2 = \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2 \\
\Longrightarrow\; & 4a^2(c^2 - h^2) = \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2 \\
\Longrightarrow\; & 4a^2c^2 - 4a^2h^2 = \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2 \\
\Longrightarrow\; & (2ah)^2 = (2ac)^2 - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2 \\
\Longrightarrow\; & (2ah)^2 = (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2) \\
\Longrightarrow\; & (2ah)^2 = \left((a+c)^2 - b^2\right)\left(b^2 - (a-c)^2\right) \\
\Longrightarrow\; & (2ah)^2 = ((a+c)+b)((a+c)-b)\cdot \\
& \qquad (b + (a-c))(b - (a-c)) \\
\Longrightarrow\; & (2ah)^2 = (a+b+c)(a-b+c)\cdot \\
& \qquad \cdot (a+b-c)(-a+b+c) \\
\Longrightarrow\; & (2ah)^2 = 2p\cdot(2p-2b)\cdot(2p-2c)\cdot(2p-2a) \\
\Longrightarrow\; & (2ah)^2 = 16p(p-b)(p-c)(p-a) \\
\Longrightarrow\; & 2ah = 4\sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)} \\
\Longrightarrow\; & \frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)}.
\end{aligned}$$

Mas $\frac{ah}{2}$ é precisamente a área de ABC.

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor todo o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que, antes de apresentarem a demonstração da fórmula de Herão como consequência do Teorema de Pitágoras, incentivem os alunos a relembrarem a demonstração que foi apresentada utilizando a Lei dos Cossenos. Chamem a atenção dos alunos para o fato de que a demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras utiliza o próprio teorema. Alguns alunos podem ficar confusos com isso, mas explique que esse procedimento é correto do ponto de vista lógico, pois o Teorema de Pitágoras, uma vez que já foi demonstrado, pode ser utilizado para provar qualquer outro teorema, inclusive o seu recíproco.

As referências listadas abaixo apresentam outras demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.