Material Teórico - Determinantes como Áreas - Parte I

Transformações e Determinantes - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

08 de Junho de 2022

Portal OBMEP

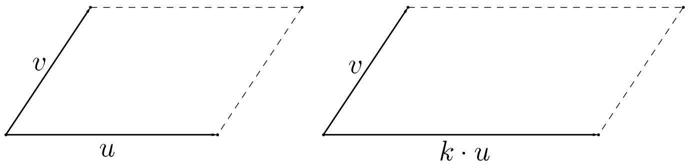
Portal da Matemática
OBMEP

Nesta aula, apresentaremos mais uma propriedade fundamental de determinantes, bem como sua interpretação geométrica. Encerraremos com algumas aplicações do material desenvolvido até então.

Em relação a aula anterior, recorde que $\det[u,v]$, o determinante da matriz cujas colunas são, nessa ordem, os vetores u e v, pode ser interpretado como a *área orientada* do paralelogramo gerado por u e v.

1 A homogeneidade do determinante

Observe a figura abaixo.



A 1ª proposição do 6º livro dos *Elementos de Euclides* nos informa: *dois paralelogramos de mesma altura estão entre si como as suas bases.* De outro modo, se multiplicarmos por k a (medida da) base de um paralelogramo, formaremos um novo paralelogramo, cuja área é o produto do fator k pela área do paralelogramo inicial. Esse fato nos leva à

2ª Propriedade dos Determinantes (Homogeneidade):

$$\det[k \cdot u,v] = k \det[u,v],$$

para quaisquer vetores u,v e para qualquer número real k.

A verificação algébrica dessa propriedade é simples: se

$u=(a,b)$ e $v=(c,d)$, então $k\cdot u=(ka,kb)$, logo

$$\begin{aligned}\det[k\cdot u,v] &= \begin{vmatrix} ka & c \\ kb & d \end{vmatrix}\\ &= kad-kbc\\ &= k(ad-bc)\\ &= k\det[u,v].\end{aligned}$$

De forma análoga se verifica que $\det[u,l\cdot v]=l\det[u,v]$. Portanto, vale

$$\det[k\cdot u,l\cdot v]=kl\det[u,v], \tag{1}$$

para quaisquer vetores u,v e quaisquer números reais k,l.

Exemplo 1. *Dados os números reais a,b e c, construa com régua e compasso um segmento de medida x, tal que $ax=bc$ (vide [1]).*

Solução. Construa um retângulo $OADB$ com $\overline{OA}=a$ e $\overline{OB}=b$. Marcando na semirreta $\overrightarrow{OA}$ o ponto C que satisfaz $\overline{OC}=c$, seja P o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{OD}$ com a paralela a OB passando por C. Se X é a interseção de $\overleftrightarrow{OB}$ com a paralela a OA passando por P, afirmamos que OX é a solução do nosso problema. Acompanhe na figura abaixo.

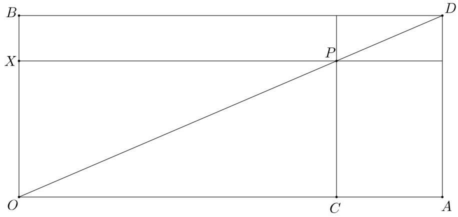


Figura 1: "solução grega" de uma equação do 1º grau.

De fato, note que os triângulos OAD e ODB têm mesma área, ou seja, $\frac{1}{2}\det[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}]=\frac{1}{2}\det[\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}]$. Afirmamos

Portal OBMEP

que os triângulos OPA e OPB também têm áreas iguais. Com efeito, vale $\overrightarrow{OP} = k \cdot \overrightarrow{OD}$, para algum número real k. Denotando por $\mathcal{A}(R)$ a área de uma região $\mathcal{R}$ do plano, e levando em conta a relação (1), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(OPA) &= \frac{1}{2}\det[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}] = \frac{1}{2}\det[\overrightarrow{OA},k \cdot \overrightarrow{OD}]\\ &= \frac{k}{2}\det[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}].\end{aligned}$$

De modo análogo se prova que $\mathcal{A}(OPB) = \frac{k}{2}\det[\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}]$, de onde segue a afirmação. Se $x = \overrightarrow{OX}$, as igualdades $\mathcal{A}(OPA) = \frac{ax}{2}$ e $\mathcal{A}(OPB) = \frac{bc}{2}$ nos garantem a relação $ax = bc$. $\square$

Daqui em diante, faremos uso da noção de *polígono simples*. Um polígono P é dito simples se ele não possui autointerseções. Mais precisamente, $P = A_1A_2\ldots A_n$ é simples se, para cada $i = 1,2,\ldots,n$, os segmentos $A_{i-1}A_i$ e $A_{i+1}A_{i+2}$ são os únicos lados de P que intersectam o lado A_iA_{i+1} (tome $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$). Por exemplo, qualquer polígono convexo é simples (mas a recíproca é falsa. Veja a figura abaixo).

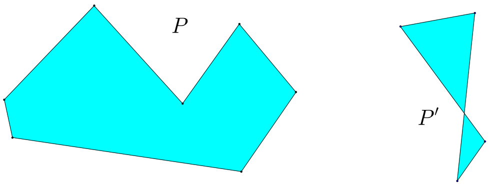


Figura 2: P é um polígono simples; P' não é.

Pode-se provar ([3]) que um polígono simples P divide o plano em duas regiões, uma limitada chamada *interior* de P e outra ilimitada denominada *exterior* de P. Além disso, denotando por $\overline{P}$ a reunião do polígono simples P com o seu interior, temos o seguinte resultado.

Lema 2. *Se P é um polígono simples de n lados, então $\overline{P}$ pode ser **triangulado**. Mais precisamente, $\overline{P}$ se decompõe numa reunião de $n-2$ regiões triangulares, quaisquer duas das quais sem pontos interiores em comum, sendo os vértices desses triângulos também vértices de P.*

Demonstração. Veja [2] ou [3]. □

O lema acima tem consequências interessantes. Além da área de P se escrever como a soma das áreas dos triângulos que decompõem $\overline{P}$ (fato que utilizaremos mais tarde), é fácil agora mostrar que *a soma dos ângulos internos de qualquer n-polígono simples (ainda que não-convexo) é igual a* $(n-2)180°$ (veja [2]).

Queremos, agora, relacionar a área de uma região $\mathcal{R}$ do plano com a área da sua imagem $S(\mathcal{R})$ por uma semelhança S (veja a aula *Transformações Lineares no* $\mathbb{R}^2$ - *Parte I*, do módulo de *Geometria das transformações lineares*). Com esse intuito, segue uma definição do que se entende por área de uma região.

Definição 3. *Considere no plano Π uma região $\mathcal{R}$. Suponha que existam duas sequências (infinitas) de polígonos* simples *(P_n) e (Q_n) satisfazendo as duas consições a seguir:*

i. $P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_n \subset \cdots \subset \mathcal{R} \subset \cdots \subset Q_n \subset \cdots \subset Q_2 \subset Q_1$.

ii. É possível tomar diferenças de áreas $\mathcal{A}(Q_n) - \mathcal{A}(P_n)$ tão pequenas quanto se queira.

Nesse caso, $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, a área da região $\mathcal{R}$, é definida como o único número real admitindo as áreas $\mathcal{A}(P_n)$ como aproximações por falta e as áreas $\mathcal{A}(Q_n)$ como aproximações por excesso. De outro modo, $\mathcal{A}(R)$ é o único número real satisfazendo $\mathcal{A}(P_n) \leq \mathcal{A}(\mathcal{R}) \leq \mathcal{A}(Q_n)$, para cada natural n.

Para efeito de ilustração, o número π, que é a área do círculo unitário $\mathcal{C}$, é aproximado por falta (resp. excesso), com o grau de precisão que desejarmos, pelas áreas dos polígonos regulares inscritos (resp. circunscritos) em (resp. a) $\mathcal{C}$ (veja o capítulo V da referência [4]).

Portal OBMEP

Observação 4.

1. *Sempre que considerarmos a área de uma região $\mathcal{R}$ do plano, ficará subentendido que as condições da definição anterior se verificam para $\mathcal{R}$.*

2. *A segunda condição na definição acima pode ser reescrita, de modo mais preciso, da seguinte maneira: dado arbitrariamente um número real positivo ε, deve existir um número natural n satisfazendo $\mathcal{A}(Q_n) - \mathcal{A}(P_n) < \varepsilon$. (O número ε é, evidemtemente, um erro entre as áreas dos polígonos P_n e Q_n.)*

Na demonstração do próximo teorema, utilizaremos o material da aula *Transformações Lineares no* $\mathbb{R}^2$ *- Parte I.*

Teorema 5. *Se $S : \Pi \to \Pi$ é uma semelhança de razão k, $\mathcal{R}$ é uma região do plano e $\mathcal{R}' = S(\mathcal{R})$ é a imagem de $\mathcal{R}$ por S, então*

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}') = k^2\mathcal{A}(\mathcal{R}). \tag{2}$$

Demonstração. Vamos dividir em casos.

1º caso: $\mathcal{R}$ é um triângulo ABC.

Escreva $S = T \circ H$, em que T é uma isometria e H é a homotetia centrada num ponto O e de razão k (teorema 15 da aula mencionada acima). Para um ponto P qualquer do plano, pondo $P' := H(P)$, lembre-se de que $P' = O + k \cdot \overrightarrow{OP}$. Assim, se $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$, segue imediatamente que $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot u$ e $\overrightarrow{A'C'} = k \cdot v$, de modo que, pela relação (1), vale

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(A'B'C) &= \frac{1}{2}|\det[k \cdot u, k \cdot v]| = k^2\frac{1}{2}|\det[u,v]| \\ &= k^2\mathcal{A}(ABC).\end{aligned}$$

Sendo uma isometria, T transforma $A'B'C'$ num triângulo conguente $A''B''C''$. Portanto,

$$\mathcal{A}(S(ABC)) = \mathcal{A}(A''B''C'') = \mathcal{A}(A'B'C') = k^2\mathcal{A}(ABC).$$

Portal OBMEP

2º caso: $\mathcal{R}$ é um polígono simples P:

Este caso segue do caso anterior e do lema 2.

Caso geral.

Nas notações da definição (3), sejam $P'_n = S(P_n)$ e $Q'_n = S(Q_n)$, para cada natural n. É fácil ver que as sequências de polígonos simples (P'_n) e (Q'_n) satisfazem a 1ª condição da definição 3 relativamente à região $\mathcal{R}'$. Quanto à segunda condição, dado $\varepsilon > 0$, deve existir um natural n tal que $\mathcal{A}(Q_n) - \mathcal{A}(P_n) < \varepsilon/k^2$. Reescrevendo essa desigualdade como $k^2\mathcal{A}(Q_n) - k^2\mathcal{A}(P_n) < \varepsilon$ e levando em conta o 2º caso, temos $\mathcal{A}(Q'_n) - \mathcal{A}(P'_n) < \varepsilon$, ou seja, as condições da definição 3 para a região $\mathcal{R}'$ são satisfeitas com as sequências (P'_n) e (Q'_n).

Portanto, a área de $\mathcal{R}'$ é o único número real cumprindo com as desigualdades $\mathcal{A}(P'_n) \le \mathcal{A}(\mathcal{R}') \le \mathcal{A}(Q'_n)$, as quais equivalem a $k^2\mathcal{A}(P_n) \le \mathcal{A}(\mathcal{R}') \le k^2\mathcal{A}(Q_n)$ ou, ainda, $\mathcal{A}(P_n) \le \frac{\mathcal{A}(\mathcal{R}')}{k^2} \le \mathcal{A}(Q_n)$, para cada n natural. Ora, como sabemos, o único número real satisfazendo essas últimas desigualdades é a área da região $\mathcal{R}$, o que nos leva a $\frac{\mathcal{A}(\mathcal{R}')}{k^2} = \mathcal{A}(R)$, que é a relação desejada (2). $\square$

Observação 6. *Numa aula posterior, enunciaremos um resultado mais geral que o teorema* (5)*, substituindo uma semelhança por uma equivalência afim (veja a aula* Equivalências Afins e Aplicações - Parte I *do módulo* Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria*).*

2 Aplicações

Sejam ABC um triângulo retângulo em A e $\mathcal{R}_{BC}$,$\mathcal{R}_{AB}$,$\mathcal{R}_{AC}$ figuras semelhantes construídas sobre os lados de ABC. Mais especificamente, estamos supondo que exista uma semelhança transformando o par ($\mathcal{R}_{BC}$,BC) no par ($\mathcal{R}_{AB}$,AB) (resp. ($\mathcal{R}_{AC}$,AC)). Desse modo temos o

Exemplo 7 (*Generalização do Teorema de Pitágoras*). *Nas*

Portal OBMEP

notações acima, vale

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_{BC}) = \mathcal{A}(\mathcal{R}_{AB}) + \mathcal{A}(\mathcal{R}_{AC}). \tag{3}$$

Em palavras: se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura sobre a hipotenusa é a soma das áreas das figuras sobre os catetos. [1]

Solução. Se uma semelhança transforma $(\mathcal{R}_{BC}, BC)$ em $(\mathcal{R}_{AB}, AB)$, sua razão deve ser $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Portanto, pelo teorema 5, tem-se $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{AB}) = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}\mathcal{A}(\mathcal{R}_{BC})$. De forma similar, vale $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{AC}) = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}\mathcal{A}(\mathcal{R}_{BC})$. Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{R}_{AB}) + \mathcal{A}(\mathcal{R}_{AC}) &= \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}\mathcal{A}(\mathcal{R}_{BC}) + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}\mathcal{A}(\mathcal{R}_{BC}) \\ &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}\mathcal{A}(\mathcal{R}_{BC}) \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{R}_{BC}),\end{aligned}$$

sendo que o teorema clássico de Pitágoras, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, foi utilizado na última igualdade. □

Doravante, considere fixado no plano um sistema cartesiano de coordenadas de origem O. A *rede* do sistema consiste dos pontos cujas coordenadas são números inteiros. Estamos interessados no cálculo da área de um *polígono da rede*, ou seja, um polígono cujos vértices tenham coordenadas inteiras.

Um paralelogramo (resp. triângulo) P da rede é dito *fundamental* quando os únicos pontos da rede na região $\overline{P}$ são os próprios vértices de P.

Exemplo 8. *Todo paralelogramo fundamental tem área* 1.

Solução. Seja $P = OACB$ um paralelogramo fundamental. A ideia é "pavimentar" o plano com cópias de P. Em outras

[1] Na versão original do Teorema de Pitágoras, as figuras são quadrados.

Portal OBMEP

palavras, transladando P por cada um dos vetores $v_{m,n} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, sendo m,n números inteiros, decompomos o plano numa reunião de palalelogramos fundamentais (como o vetor $v_{m,n}$ tem coordenadas inteiras, P é fundamental se, e só se, $P + v_{m,n}$ o é). Portanto, os pontos da rede só podem ser vértices desses paralelogramos, ou seja, a rede consiste, precisamente, dos pontos da forma $(ma{+}nc,mb{+}nd)$, em que $\overrightarrow{OA} = (a,b)$, $\overrightarrow{OB} = (c,d)$ e m e n são números inteiros. Em particular, existem inteiros m_0,m_1,n_0,n_1 tais que $\begin{cases} m_0a + n_0c = 1 \\ m_0b + n_0d = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} m_1a + n_1c = 0 \\ m_1b + n_1d = 1 \end{cases}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_0 & m_1 \\ n_0 & n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tomando o determinante em ambos os membros dessa igualdade matricial, vem $(ad - bc)(m_0n_1 - m_1n_0) = 1$. Como os fatores no primeiro membro são números inteiros, só pode ser $ad - bc = \pm 1$, de onde segue que $\mathcal{A}(P) = |ad - bc| = 1$, como queríamos. $\square$

É fácil verificar que o triângulo ABC é fundamental se, e so se, o paralelogramo $ABDC$ é fundamental. Daí

Corolário 9. *Todo triângulo fundamental tem área* $1/2$.

Agora vamos obter um resultado importante em aritmética.

Corolário 10 (Lema de Bézout)**.** *Sejam a e b inteiros primos entre si. Então existem números inteiros c e d tais que $ad - bc = 1$.*

Solução. Seja $A = (a,b)$. Por hipótese, não há pontos da rede no interior do segmento OA. Por outro lado, se P é um ponto da rede fora da reta $\overleftrightarrow{OA}$, a fórmula para a área de um triângulo nos garante que $2\mathcal{A}(OAP)$ é um número natural. Assim, podemos escolher P de modo que $\mathcal{A}(OAP)$ seja o menor possível. Afirmamos que o triângulo OAP é fundamental. Com efeito, se $Q \notin \{O,A,P\}$ fosse um ponto

Portal OBMEP

da rede no triângulo OAP, valeria $\mathcal{A}(OAQ) < \mathcal{A}(OAP)$, contradizendo a escolha de P. Assim, OAP é fundamental e, se $P = (c,d)$, então $1/2 = \mathcal{A}(OAP) = |ad - bc|/2$. Por sua vez, isso acarreta $ad - bc = \pm 1$, conforme desejado. □

Vamos enunciar sem demonstração o seguinte resultado (veja [6]).

Teorema 11 (Pick). *Seja P um polígono simples da rede. Se P contém B pontos da rede e I pontos da rede pertencem ao interior de P, então*

$$\mathcal{A}(P) = I + B/2 - 1. \tag{4}$$

Observação 12. *Quando P é um triângulo, o teorema de Pick se reduz ao corolário 9.*

Para finalizar, temos o seguinte

Exemplo 13. *Não existe triângulo equilátero da rede.*

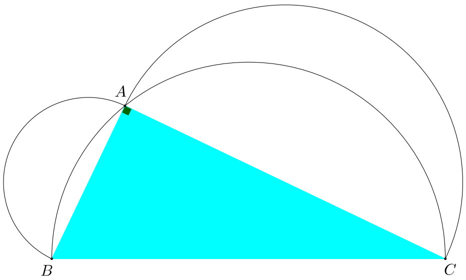
Solução. Por contradição, suponha que ABC seja um triângulo equilátero da rede, de lado l, digamos. Pela fórmula da distância entre dois pontos, l^2 é um inteiro positivo. Por outro lado, como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ têm coordenadas inteiras, a fórmula $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}|\det[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|$ garante que $\mathcal{A}(ABC)$ é um número racional. No entanto, é bem sabido que, sendo ABC equilátero, tem-se $\mathcal{A}(ABC) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, de sorte que $\sqrt{3} = \frac{4\mathcal{A}(ABC)}{l^2}$. Mas aí, $\sqrt{3}$ seria um número racional, uma contradição. □

Dicas para o Professor

Vale a pena observar a relação entre a solução do exemplo 1 e o último exemplo da aula passada. Na solução do exemplo 1, provamos que $\mathcal{A}(OPA) = \mathcal{A}(OPB)$, qualquer que seja o ponto P na diagonal OD do retângulo $OADB$. Isso também segue do exemplo 8 da aula anterior, já que $\overleftrightarrow{OD}$ é a reta suporte da mediana que sai de O no triângulo OAB.

Portal OBMEP

Convém exemplificar a versão generalizada do teorema de Pitágoras com algumas figuras particulares, como triângulos equiláteros ou semicírculos. Em relação à última possibilidade, temos uma bela reformulação por meio das *lúnulas de Hipócrates* (vide [7]): *sobre cada cateto de um triângulo retângulo constrói-se um semicírculo justaposto ao triângulo e, sobre a hipotenusa, um semicírculo contendo o triângulo. Então, a soma das áreas das lúnulas assim formadas é igual a área do triângulo.*



O seguinte resultado, devido ao matemático H. Minkowsky, generaliza o exemplo 13: *os únicos polígonos regulares da rede são os quadrados.* Para uma demonstração, veja o artigo [5] ou, ainda, o problema 10 da seção 8.3 de [4].

Três sessões de 50 minutos devem ser suficientes para expor o conteúdo deste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. Wagner. *Construções Geométricas.* 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

2. E. L. Lima. *Qual é a soma dos ângulos (internos ou externos) de um polígono (convexo ou não)?. RPM 19.*

3. S. B. Jackson. *A Development of the Jordan Curve Theorem and the Schoenflies Theorem for Polygons.*

Portal OBMEP

The American Mathematical Monthly, vol 75, nº 9 (nov, 1968), pp. 989 - 998.

4. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2. Geometria Euclidiana Plana.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

5. J. D. King. *Regular polygons with integer coordinates.* The Mathematical Gazette, vol 94, nº 531 (november 2010), pp. 495 - 498.

6. E. L. Lima. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.* 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

7. E. L. Lima. *Medida e Forma em Geometria.* 4ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

Portal OBMEP