Material Teórico - Módulo Triângulo Retângulo, Leis dos Cossenos e dos Senos, Polígonos Regulares

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos - Parte 1

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

6 de maio de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 A Lei dos Cossenos

O objetivo desse material é demonstrar e exibir algumas aplicações do teorema abaixo, que é uma generalização do Teorema de Pitágoras, conhecido como **Lei dos Cossenos**. Antes, porém, necessitamos estender a definição de cosseno a ângulos retos e obtusos. Para tanto, considere α um ângulo obtuso. Temos:

$$\begin{aligned} 90^{\text{o}} < \alpha < 180^{\text{o}} &\Longleftrightarrow -180^{\text{o}} < -\alpha < -90^{\text{o}} \\ &\Longleftrightarrow 0^{\text{o}} < 180^{\text{o}} - \alpha < 90^{\text{o}}, \end{aligned}$$

ou seja, $180^{\text{o}} - \alpha$ é um ângulo agudo. Então, para $90^{\text{o}} < \alpha < 180^{\text{o}}$, definimos o cosseno de α por

$$\cos\alpha = -\cos\left(180^{\text{o}} - \alpha\right).$$

Definimos, ainda, $\cos 90^{\text{o}} = 0$. Mais adiante, estudaremos o cosseno em situações mais gerais e ficará claro o porquê das definições acima.

Teorema 1. *Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. Então,*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}. \tag{1}$$

Prova. Iniciamos com o caso $\widehat{A} = 90^{\text{o}}$. Como $\cos 90^{\text{o}} = 0$, temos:

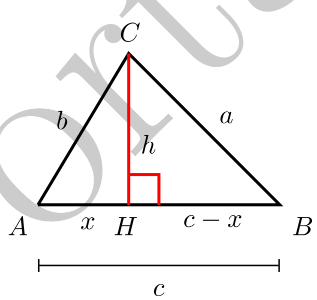
$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90^{\text{o}} = b^2 + c^2.$$

Por outro lado, como ABC é retângulo em A, o Teorema de Pitágoras garante que

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Então, (1) vale nesse caso.

Suponha, agora, que $\widehat{A} < 90^{\text{o}}$, e sejam H o pé da perpendicular ao segmento AB passando pelo vértice C, $h = \overline{CH}$ e $x = \overline{AH}$. Se também tivermos $\widehat{B} < 90^{\text{o}}$, a situação é a descrita na figura a seguir (o caso $\widehat{B} \geq 90^{\text{o}}$ pode ser tratado de modo análogo, com modificações mínimas):



Como $\overline{HB} = c - x$, aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos HCA e HBC, obtemos, respectivamente,

$$b^2 = h^2 + x^2 \;\text{ e }\; a^2 = h^2 + (c-x)^2.$$

Tais igualdades são equivalentes (também respectivamente) a

$$h^2 = b^2 - x^2 \;\text{ e }\; h^2 = a^2 - (c-x)^2,$$

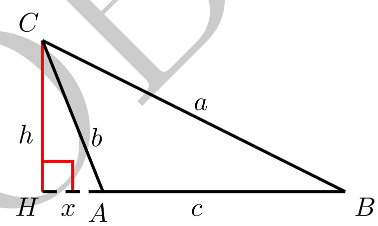
de sorte que $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$. Mas,

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2 &\Longleftrightarrow b^2 - \cancel{x^2} = a^2 - c^2 + 2cx - \cancel{x^2} \\ &\Longleftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx. \end{aligned}$$

Agora, como o triângulo HCA é retângulo (veja novamente a figura anterior), a razão $\frac{x}{c}$, entre o cateto oposto ao ângulo $\widehat{A}$ e a hipotenusa do triângulo, é igual a $\cos\widehat{A}$. Daí, obtemos $x = c\cos\widehat{A}$ e, portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Caso $\widehat{A} > 90^{\text{o}}$, sejam H o pé da perpendicular baixada de C ao prolongamento do lado AB (veja a próxima figura), $h = \overline{CH}$ e $x = \overline{AH}$. Como no caso anterior, o Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos HAC e HBC fornece as igualdades



$$b^2 = h^2 + x^2 \text{e} \;\; a^2 = h^2 + (c+x)^2$$

ou, ainda,

$$h^2 = b^2 - x^2 \;\text{ e }\; h^2 = a^2 - (c+x)^2.$$

A partir delas, temos $b^2 - x^2 = a^2 - (c+x)^2$. Também como antes,

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 = a^2 - (c+x)^2 &\Longleftrightarrow b^2 - \cancel{x^2} = a^2 - c^2 - 2cx - \cancel{x^2} \\ &\Longleftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cx. \end{aligned}$$

Uma vez que $B\widehat{A}C > 90^\circ$ (veja novamente a figura), temos

$$\cos B\widehat{A}C = -\cos(180^\circ - B\widehat{A}C) = -\cos H\widehat{A}C.$$

Por outro lado, observando o triângulo HAC, notamos que $\frac{x}{b} = \cos H\widehat{A}C$. Portanto,

$$x = b\cos H\widehat{A}C = -b\cos\widehat{A}$$

e, assim, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

$\square$

O corolário a seguir traz uma consequência útil da Lei dos Cossenos.

Corolário 2. *Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. Se $a > b > c$, então:*

(a) ABC é retângulo $\iff a^2 = b^2 + c^2$.

(b) ABC é acutângulo $\iff a^2 < b^2 + c^2$.

(c) ABC é obtusângulo $\iff a^2 < b^2 + c^2$.

Prova. Para o item (a), comece observando que, como $a > b > c$, o triângulo ABC é retângulo se, e só se, sua hipotenusa for a. Portanto, o item (a) é composto pelo Teorema de Pitágoras e a sua recíproca, os quais já foram provados na aula sobre relações métricas em triângulos retângulos.

Para o item (b), observe inicialmente que, utilizando a Lei dos Cossenos, temos:

$$\begin{aligned} a^2 < b^2 + c^2 &\iff \cancel{b^2} + \cancel{c^2} - 2bc\cos\widehat{A} < \cancel{b^2} + \cancel{c^2} \\ &\iff -2bc\cos\widehat{A} < 0 \\ &\iff \cos\widehat{A} < 0 \\ &\iff \widehat{A} < 90^{\text{o}}. \end{aligned}$$

Agora, note que a hipótese $a > b > c$ implica $90^{\text{o}} > \widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$, o que conclui a prova do item (b).

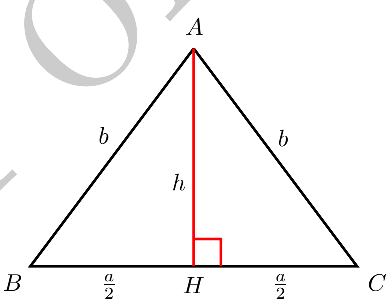
Para (c), podemos mostrar, através de um argumento análogo ao feito acima, que

$$a^2 > b^2 + c^2 \iff \widehat{A} > 90^{\text{o}}.$$

□

No restante deste material, apresentaremos algumas aplicações da Lei dos Cossenos.

Exemplo 3 (UFRGS). *No triângulo representado na figura abaixo, os lados AB e AC têm uma mesma medida, e a altura relativa ao lado BC é igual a $\frac{2}{3}$ da medida do lado BC. Com base nesses dados, calcule o cosseno do ângulo $B\widehat{A}C$.*



Solução. Inicialmente, recorde que, sendo BAC isósceles de base BC e AH altura relativa a BC, temos que H é o ponto médio de BC (isso segue da congruência dos triângulos ABH e ACH, pelo caso CH de congruência de triângulos retângulos). Portanto, as notações $\overline{BH} = \overline{CH} = \frac{a}{2}$, empregadas na figura anterior, têm sentido.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo AHC e usando a igualdade (dada no enunciado) $h = \frac{2b}{3}$, obtemos:

$$\begin{aligned} b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &\implies b^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &\implies b^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{a^2}{4} \\ &\implies b^2 = \frac{25a^2}{36} \\ &\implies b = \frac{5a}{6}. \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo ABC, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2\cos\widehat{A} &\implies a^2 = 2b^2(1 - \cos\widehat{A}) \\ &\implies \cancel{a^2} = \frac{50\cancel{a^2}}{36}(1 - \cos\widehat{A}) \\ &\implies 1 - \cos\widehat{A} = \frac{36}{50} \\ &\implies \cos\widehat{A} = 1 - \frac{36}{50} \\ &\implies \cos\widehat{A} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$. Calcule, em graus, a medida do ângulo $\angle BAC$.*

Solução. Utilizando a lei dos cossenos, obtemos

$$\overline{BC}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

e, daí,

$$\left(\sqrt{b^2 + c^2 - bc}\right)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Portanto,

$$b^2 + c^2 - bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A},$$

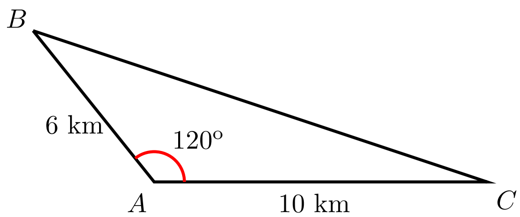
e, após efetuarmos os cancelamentos possíveis,

$$\cos\widehat{A} = \frac{1}{2}.$$

Daí, segue que $\widehat{A} = 60^{\text{o}}$. □

Exemplo 5. *Um míssil, viajando em trajetória praticamente retilínea, foi detectado por um radar situado no ponto A em dois instantes distintos: o primeiro no ponto B tal que $\overline{AB} = 6km$, e o segundo no ponto C, tal que $\overline{AC} = 10$ km. Sabendo que $B\hat{A}C = 120^o$, calcule a distância percorrida pelo míssil do ponto B até o ponto C.*

Solução. O triângulo ABC da figura abaixo representa a situação descrita no enunciado. Aplicando a Lei dos



Cossenos ao mesmo e omitindo as unidades de distância por conveniência, obtemos:

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cos 120^{\text{o}}.$$

Mas,

$$\cos 120^{\text{o}} = -\cos(180^{\text{o}} - 120^{\text{o}}) = -\cos 60^{\text{o}} = -\frac{1}{2},$$

de modo que

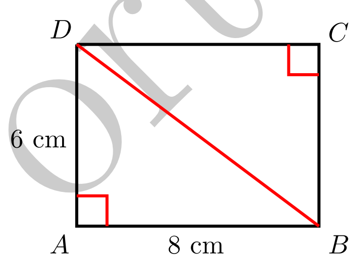
$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= 6^2 + 10^2 - \cancel{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \\ &= 36 + 100 + 60 = 196.\end{aligned}$$

Então,

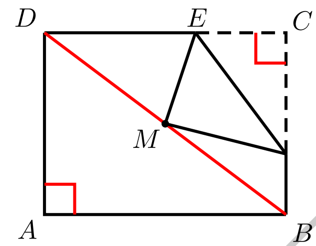
$$\overline{BC} = \sqrt{196} \text{ km} = 14 \text{ km}.$$

□

Exemplo 6. *A figura abaixo representa uma folha de papel retangular, de dimensões $\overline{AD} = 6$ cm e $\overline{AB} = 8$ cm.*



Subsequentemente, essa folha foi dobrada de modo que o vértice C ficou sobre o ponto médio M da diagonal BD, conforme mostrado na próxima figura. Pede-se calcular a medida do segmento EM.



Solução. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABD, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 &\Longrightarrow \overline{BD}^2 = 6^2 + 8^2 \\ &\Longrightarrow \overline{BD}^2 = 36 + 64 \\ &\Longrightarrow \overline{BD}^2 = 100 \\ &\Longrightarrow \overline{BD} = 10.\end{aligned}$$

Agora, nas notações da segunda figura acima, veja que $\overline{EM} = \overline{EC}$. Daí, obtemos:

$$\overline{DE} = \overline{DC} - \overline{EC} = 8 - \overline{EM}.$$

Note também que

$$\cos E\hat{D}M = \cos C\hat{D}B = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

e

$$\overline{DM} = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Portanto, aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo EDM, obtemos:

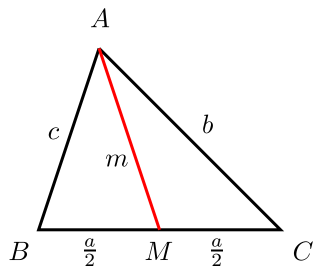
$$\begin{aligned}\overline{EM}^2 &= \overline{DE}^2 + \overline{DM}^2 - 2\overline{DE} \cdot \overline{DM} \cos E\hat{D}M \\ &= \left(8 - \overline{EM}\right)^2 + 5^2 - 2\left(8 - \overline{EM}\right) \cdot \cancel{5} \cdot \frac{4}{\cancel{5}} \\ &= 64 - 16\overline{EM} + \overline{EM}^2 + 25 - 8\left(8 - \overline{EM}\right) \\ &= \cancel{64} - 16\overline{EM} + \overline{EM}^2 + 25 - \cancel{64} + 8\overline{EM} \\ &= -8\overline{EM} + \overline{EM}^2 + 25.\end{aligned}$$

Então, $8\overline{EM} = 25$, de sorte que

$$\overline{EM} = \frac{25}{8} \cong 3,125 \text{ cm}.$$

□

Exemplo 7. *Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Denotando por M o ponto médio do lado BC, calcule a medida m da mediana AM em função de a, b e c.*



Solução. Nas notações da figura acima, pondo $\theta = A\widehat{M}B$, temos $A\widehat{M}C = 180^{\text{o}} - \theta$. Utilizando a Lei dos Cossenos nos triângulos AMB e AMC obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 - \cancel{2} \cdot \frac{a}{\cancel{2}} \cdot m\cos\theta \\ &= \frac{a^2}{4} + m^2 - am\cos\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 - \cancel{2} \cdot \frac{a}{\cancel{2}} \cdot m\cos\left(180^{\text{o}} - \theta\right) \\ &= \frac{a^2}{4} + m^2 - am(-\cos\theta) \\ &= \frac{a^2}{4} + m^2 + am\cos\theta. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as expressões para b^2 e c^2 obtidas acima, ficamos com

$$b^2 + c^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{4} + 2m^2 = \frac{a^2}{2} + 2m^2.$$

Então,

$$m^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

e, por fim,

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Explicar aos alunos que a Lei dos Cossenos é uma generalização do Teorema de Pitágoras é fundamental para o entendimento desse conteúdo. Sugerimos o uso de figuras (comparando os três casos) para melhor explicar o Corolário 2. Além disso, ao fazer cada exemplo, ressalte o momento onde está sendo aplicada a Lei dos Cossenos.

As referências a seguir contêm mais exemplos e problemas de variados graus de dificuldade, envolvendo a Lei dos Cossenos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* São paulo, Editora Atual, 2013.