Material Teórico - Módulo Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria

Equivalências Afins e Aplicações - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Abril de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta segunda parte, continuaremos apresentando exemplos do uso de equivalências afins na resolução de problemas geométricos.

1 Mais aplicações

Para nosso primeiro exemplo, lembre-se de que uma equivalência afim F preserva razões orientadas: $\frac{\overline{F(P)F(X)}}{\overline{F(X)F(Q)}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}}$, para quaisquer três pontos colineares e distintos P, Q e X. (vide relação (2) da 1ª parte). Também convém relembrar o Teorema 3 da 1ª parte: *quaisquer dois paralelogramos são afim-equivalentes.*

Exemplo 1. *Uma reta r corta os lados AB e AD de um paralelogramo $ABCD$ nos pontos E e F, repectivamente. Se G é o ponto de interseção da diagonal AC com a reta r, prove que* $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}$.

Prova. Como a igualdade proposta no problema envolve apenas razões orientadas, podemos fazer a sua verificação para um paralelogramo em particular, por exemplo, um quadrado. Daí seguirá o caso geral.

Mais explicitamente, transforme o paralelogramo $ABCD$ num quadrado $A'B'C'D'$, de modo que a configuração $S = \{A,B,C,D,E,F,G\}$ seja afim-equivalente a $S' = \{A',B',C',D',E',F',G'\}$. As relações $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'E'}}$, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{A'F'}}$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'G'}}$ nos dizem que as igualdades $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}$ e $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'E'}} + \frac{\overline{A'D'}}{\overline{A'F'}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'G'}}$ são equivalentes. Assim, no final das contas, podemos supor que $ABCD$ é um quadrado. Veja a figura na próxima página.

Sendo $\overline{AC} = \sqrt{2}\,\overline{AB} = \sqrt{2}\,\overline{AD}$, a igualdade $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}$ equivale a $\frac{1}{\overline{AE}} + \frac{1}{\overline{AF}} = \frac{\sqrt{2}}{\overline{AG}}$, ou ainda, $\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \sqrt{2}$. Ora, se P e Q são os pés das perpendiculares baixadas de G sobre os lados AB e AD, respectivamente, então $APGQ$ é um quadrado. Além disso, temos as semelhanças $PGE \sim$

$AFE \sim QFG$, de forma que

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} &= \sqrt{2}\left(\frac{\overline{QG}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{GP}}{\overline{AF}}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\overline{FG}}{\overline{FE}} + \frac{\overline{GE}}{\overline{FE}}\right)\\ &= \sqrt{2},\end{aligned}$$

como desejado. □

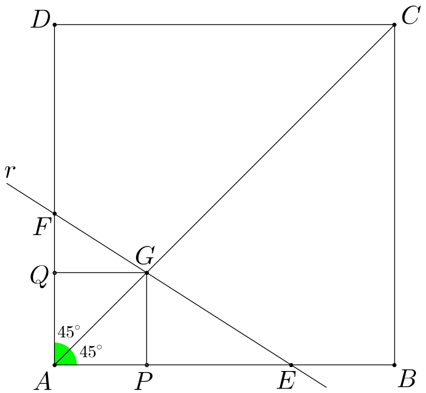

Figura 1: a versão "quadrada" do Exemplo 1.

Para o próximo exemplo, observe que, na Proposição 9 da 1ª parte, provamos o seguinte: *dados um triângulo ABC e um ponto P no interior desse triângulo, então existe um triângulo $A'B'C'$ e uma equivalência afim transformando ABC em $A'B'C'$ e levando P no ortocentro de $A'B'C'$.*

Exemplo 2. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo que não é um trapézio. Se as retas $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ se encontram em E e as retas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}$ se cruzam em F, mostre que os pontos médios dos segmentos AC, BD e EF são colineares.*

Antes de iniciar a demonstração, convém lembrar do seguinte fato: *a mediatriz do segmento que conecta os pontos de interseção de dois círculos secantes é a reta passando pelos centros desses círculos.*

Prova do Exemplo (2)**.** Para fixar as ideias, suponhamos que C seja interior ao triângulo AEF. Como "colinearidade" é uma propriedade afim, não há perda de generalidade em supor que C é o ortocentro do triângulo AEF. Portanto, os quadriláteros $ABCD$ e $BEFD$ são inscritíveis, sendo P, o ponto médio de AC, e Q, o ponto médio de EF, os centros dos círculos circunscritos a tais quadriláteros, respectivamente.

Pelo resultado da 1ª parte mencionado acima, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz do segmento BD, de modo que $\overleftrightarrow{PQ}$ corta BD em seu ponto médio M, demonstrando o que nos foi requerido. □

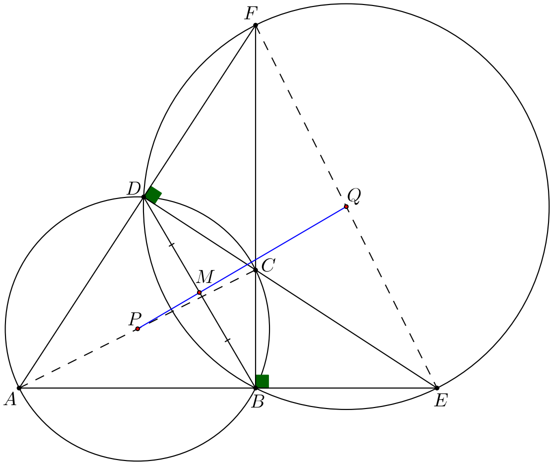

Figura 2: P, M e Q são colineares.

Observação 3. Na referência [1] é apresentada uma solução do problema anterior utilizando o resultado enunciado no Exemplo 14 da 1ª parte dessa aula.

Uma equivalência afim, em geral, não preserva bissetrizes. Há, todavia, uma exceção.

Lema 4. *Se a equivalência afim F transforma o par (r,s) de retas perpendiculares num par (r',s') de retas também perpendiculares, então qualquer ângulo admitindo r como bissetriz será transformado por F num ângulo cuja bissetriz é r'.*

A demonstração faz uso do seguinte resultado: *se OM, OD e OH são a mediana, a bissetriz e a altura, relativas ao vértice O de um triângulo então a coincidência de quaisquer duas dessas cevianas implica na igualdade das três* (vide [2]).

Prova do Lema (4). Sejam O (resp. O') o ponto de encontro das retas r,s (resp. r',s') e XOY um ângulo bissectado por r.

Fixe uma paralela t à reta s, a qual cruza os lados do ângulo nos pontos $A \in OX, B \in OY$ e corta r em M (acompanhe na Figura 3). Vemos que OM é bissetriz e altura de OAB, de modo que OM também é mediana, ou seja, M é o ponto médio de AB. Segue que $M' = F(M)$ é o ponto médio de $A'B' = F(AB)$.

Como $\overleftrightarrow{O'M'} = r' \perp s' // \overleftrightarrow{A'B'}$, vemos que $O'M'$ é mediana e altura do triângulo $O'A'B'$, de onde se conclui que $O'M'$ também é bissetriz. Logo, r' bissecta o ângulo $A'O'B'$, a imagem do ângulo XOY por F. $\square$

Observação 5. Dada uma equivalência afim F, sempre há um par de retas (r,s) nas condições do lema anterior. De fato, escrevendo $F|_O = T + v$, o teorema de decomposição polar aplicado à transformação linear invertível T nos dá $T = S \circ U$, sendo S uma transformação linear simétrica e U uma transformação linear ortogonal. Como sabemos, existe um sistema de coordenadas ortogonal, cujos eixos

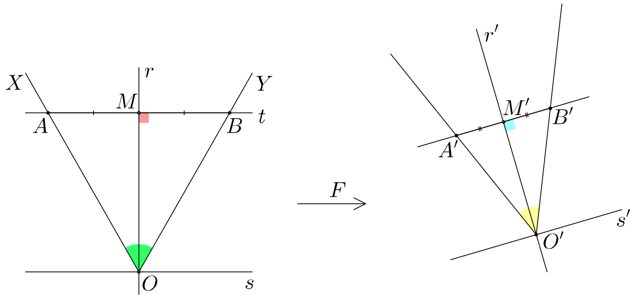

Figura 3: a configuração do Lema 4.

denotaremos por r'', s'', relativamente ao qual a matriz de S é diagonal, isto é, $S(r'') = r''$ e $S(s'') = s''$. Se r e s são as retas que se aplicam em r'' e s'' por U, então r e s são perpendiculares pois U é uma isometria. Pondo $r' = r'' + v, s' = s'' + v$, temos $r' \perp s'$ e $F(r) = r', F(s) = s'$, como desejado.

De acordo com a 1ª parte dessa aula, dois pontos P e R na reta $\overleftrightarrow{AB}$ são ditos *conjugados harmônicos* relativamente ao segmento AB se $\frac{AP}{PB} = -\frac{AR}{RB}$. Nesse caso, é fácil verificar que A e B são conjugados harmônicos em relação ao segmento PR.

Exemplo 6 (OBM - 2007). *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, P a interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, Q a interseção das retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ e O a interseção das diagonais AC e BD. Prove que se $\angle POQ$ é um ângulo reto então $\overleftrightarrow{PO}$ é bissetriz de $\angle AOD$ e $\overleftrightarrow{QO}$ é bissetriz de $\angle AOB$.*

Prova. Sem perda de generalidade, suponhamos que C seja interno ao triângulo APQ (acompanhe na Figura 4). Basta mostrar que $\overleftrightarrow{PO}$ é bissetriz de $\angle BOC$ (oposto pelo vértice a $\angle AOD$), pois, nesse caso, a perpendicular $\overleftrightarrow{QO}$ deve bissectar o ângulo suplementar $\angle COD$ (oposto pelo vértice a $\angle AOB$): $C\widehat{O}Q = 90° - B\widehat{O}C/2 = D\widehat{O}Q$. Sejam R o ponto no qual a semirreta $\overrightarrow{QO}$ corta o lado AB e H o ponto de encontro dos segmentos OP e BQ. A menos de uma equivalência afim, podemos supor que H é o ortocentro do triângulo PQR. Como $\angle POQ$ ainda é um ângulo reto nessa nova configuração, o lema anterior nos garante que PO é bissetriz de $\angle BOC$ na configuração antiga se, e só se, PO é bissetriz de $\angle BOC$ na atual configuração.

Sejam $\{S\} = \overleftrightarrow{RH} \cap \overleftrightarrow{PQ}$ e $\{A'\} = \overleftrightarrow{SO} \cap \overleftrightarrow{AB}$. Pela Proposição 21 da 1ª parte, A e A' são conjugados harmônicos de B relativamente ao segmento PR, ou seja, $A' = A$. Segue-se que $\overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{RH}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$ concorrem em S. Levando em conta que os quadriláteros $PSOR$ e $BHOR$ são inscritíveis, temos $C\widehat{O}H = H\widehat{R}B = H\widehat{O}B$, isto é, $\overleftrightarrow{OP}$ bissecta $\angle BOC$. $\square$

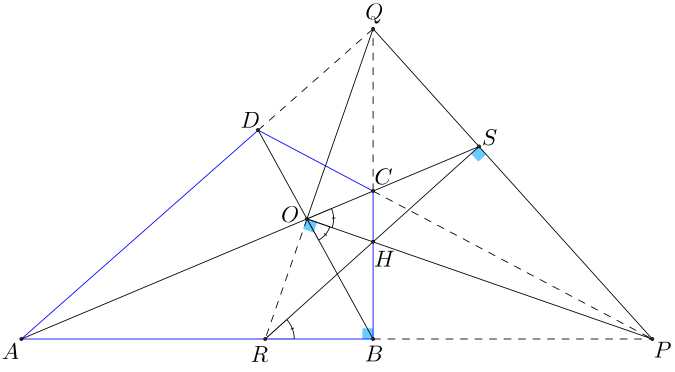

Figura 4: Exemplo 6.

Considere duas retas paralelas r e s e triângulos ABC e $A'B'C'$, com $B, C, B', C' \in r$ e $A, A' \in s$. Como esses triângulos têm mesma altura, é fácil ver que $\frac{\mathcal{A}(A'B'C')}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ (lembre que $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ denota a área de uma região $\mathcal{R}$ do plano). Dessa observação, obtemos o

Lema 7. *Se os triângulos* Δ *e* Δ' *possuem um lado em comum, então*

$$\frac{\mathcal{A}[F(\Delta')]}{\mathcal{A}[F(\Delta)]} = \frac{\mathcal{A}(\Delta')}{\mathcal{A}(\Delta)},$$

qualquer que seja a equivalência afim F.

Prova. Digamos que seja $\Delta = ABC$ e $\Delta' = A'BC$. Se a paralela r a $\overleftrightarrow{BC}$ por A' corta $\overleftrightarrow{AB}$ em D, então $\mathcal{A}(\Delta') = \mathcal{A}(BCD)$ e $\mathcal{A}[F(\Delta')] = \mathcal{A}[F(BCD)]$ (pois $F(r)$ é paralela a $F(\overleftrightarrow{BC})$). Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{A}[F(\Delta')]}{\mathcal{A}[F(\Delta)]} &= \frac{\mathcal{A}[F(BCD)]}{\mathcal{A}[F(\Delta)]} = \frac{\overline{F(DB)}}{\overline{F(BA)}} \\ &= \frac{\overline{DB}}{\overline{BA}} = \frac{\mathcal{A}(BCD)}{\mathcal{A}(\Delta)} \\ &= \frac{\mathcal{A}(\Delta')}{\mathcal{A}(\Delta)}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 8. *Sejam* $ABCD$ *um quadrilátero convexo e* P *um ponto no interior de* $ABCD$ *tal que os triângulos* PAB, PAD, PDC *e* PCB *têm áreas iguais. Mostre que* P *é o ponto médio de uma das diagonais de* $ABCD$.

Prova. Basta provar que P pertence a alguma das diagonais de $ABCD$. De fato, caso $P \in AC$, vale $1 = \frac{\mathcal{A}(PAB)}{\mathcal{A}(PCB)} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}}$, demonstrando que P é o ponto médio de AC. Assim, podemos assumir que $P \notin BD$.

Supondo, sem perda de generalidade, que P é interior ao triângulo BCD, podemos admitir que P é o ortocentro de BCD. Pelo Lema 7, nessa nova configuração, as áreas dos triângulos PAB, PAD, PDC e PCB ainda iguais. Ora, se $\{E\} = \overleftrightarrow{PC} \cap \overleftrightarrow{BD}$, então $1 = \frac{\mathcal{A}(PDC)}{\mathcal{A}(PCB)} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EB}}$, ou seja, E é o ponto médio de BD.

Se E' é o ponto de interseção dos segmentos AP e BD, a igualdade das áreas $\mathcal{A}(PAB)$ e $\mathcal{A}(PAD)$ nos garante que

$\mathcal{A}(E'PB) = \mathcal{A}(E'PD)$. Daí segue que E' também é ponto médio de BD, ou seja, $E' = E$.

Acabamos de mostrar que A, E, P e C são colineares. Em particular, $P \in AC$, o que encerra a demonstração. $\square$

Dicas para o Professor

É possível refinar o Lema 7. Por exemplo, *dada uma equivalência afim F, existe uma constante positiva k tal que $\mathcal{A}[F(\mathcal{R})] = k \cdot A(\mathcal{R})$.*

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. I. M. Yaglom. *Geometric Transformations III*. AMS. 1973.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2. Geometria Euclidiana Plana*. 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

3. A. Sarana, A. Pogorui, R. Dagnino. *Concepts and Problems for Mathematical Competitors*. Dover, 2020.