Material Teórico - Módulo de Lei dos Senos e dos Cossenos

Razões Trigonométricas em Triângulos Retângulos

Primeiro Ano do Ensino Médio

Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Recordando triângulos retângulos

Em tudo o que segue, dado um triângulo ABC, denotamos os comprimentos de seus lados por $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Recordamos que ABC é **retângulo** em A se o ângulo $\angle A$ é **reto**, quer dizer, se $\widehat{A} = 90°$ (cf. figura 1). Nesse caso, dizemos que A é o vértice do ângulo reto e os lados AB e AC são os **catetos** do triângulo. Já o lado oposto ao vértice A, isto é, o lado BC, é chamado de **hipotenusa** do triângulo ABC.

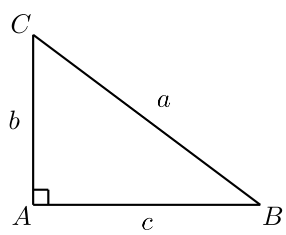

Figura 1: o triângulo retângulo ABC.

Seja ABC retângulo em A. Como a soma das medidas dos ângulos de todo triângulo é $180°$, temos

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°.$$

Mas, como $\widehat{A} = 90°$, segue da relação acima que

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180° - \widehat{A} = 180° - 90° = 90°.$$

Assim, concluímos que,

> em todo triângulo retângulo, a soma das medidas dos ângulos diferentes do ângulo reto é igual a $90°$.

Sendo ABC ainda retângulo em A, o **Teorema de Pitágoras** ensina como calcular o comprimento da hipotenusa BC em termos dos comprimentos dos catetos AB e AC:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2.$$

De outra forma, sendo (como acima) $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, o Teorema de Pitágoras diz que $a^2 = b^2 + c^2$. Assim,

$$a^2 = b^2 + c^2 > b^2,$$

de modo que $a > b$. Analogamente, $a > c$, e concluímos que

> em todo triângulo retângulo, a hipotenusa é o lado de maior comprimento.

Vejamos dois exemplos de aplicação do teorema de Pitágoras que nos serão úteis mais adiante. Para o primeiro deles, recorde que um triângulo ABC (não necessariamente retângulo) é **isósceles** se tiver dois lados iguais (cf. figura 2). Nesse caso os ângulos opostos aos lados iguais (os ângulos $\angle B$ e $\angle C$, na figura 2) também são iguais.

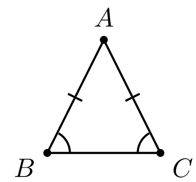

Figura 2: um triângulo isósceles.

Exemplo 1. *Seja ABC um triângulo retângulo em A e isósceles (cf. figura 3). Então, como a hipotenusa BC é o maior lado de ABC, os lados iguais de ABC devem ser seus catetos AB e AC. Denotando $\overline{AB} = \overline{AC} = \ell$, o teorema de Pitágoras fornece*

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2.$$

Portanto, $\overline{BC} = \ell\sqrt{2}$, e mostramos que

> *se os catetos de um triângulo retângulo e isósceles medem ℓ, então sua hipotenusa mede $\ell\sqrt{2}$.*

Ainda sobre o triângulo ABC, retângulo em A e isósceles, precisaremos mais adiante do seguinte fato: como $\overline{AB} = \overline{AC}$, temos que $\widehat{B} = \widehat{C}$; mas, como $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$, segue que

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 45°.$$

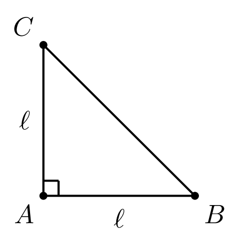

Figura 3: a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles.

Para o próximo exemplo, recorde (cf. figura 4) que um triângulo ABC é **equilátero** se seus lados forem todos iguais. Nesse caso, a igualdade $\overline{BC} = \overline{AC}$ implica a igualdade $\widehat{A} = \widehat{B}$, enquanto a igualdade $\overline{AC} = \overline{AB}$ implica a igualdade $\widehat{B} = \widehat{C}$. Portanto, $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ e, como $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$, temos

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°.$$

Exemplo 2. *Se ABC é equilátero e M é o ponto médio do lado BC (cf. figura 5), então, para os triângulos ABM e ACM, temos*

$$\overline{AB} = \overline{AC} \quad e \quad \overline{BM} = \overline{CM}.$$

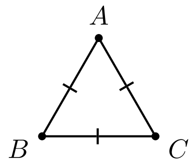

Figura 4: um triângulo equilátero.

Como AM é lado de ambos esses triângulos, concluímos, pelo caso LLL de congruência de triângulos, que eles são triângulos congruentes: $ABM \equiv ACM$. Em particular, segue que $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C$. Mas, como $A\widehat{M}B + A\widehat{M}C = 180°$, devemos ter

$$A\widehat{M}B = A\widehat{M}C = 90°.$$

Dizemos que AM é uma **altura** *do triângulo equilátero ABC. (Observe que ABC tem mais duas alturas; faça uma figura e desenhe essas outras duas alturas.)*

Agora, sendo $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \ell$, temos $\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{\ell}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABM (o qual sabemos ser retângulo em M), obtemos

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BM}^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

e, daí, $\overline{AM} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

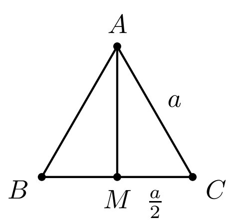

Figura 5: alturas de um triângulo equilátero.

Como um raciocínio análogo é válido para as outras duas alturas de ABC, acabamos de mostrar a seguinte propriedade:

> *se os lados de um triângulo equilátero medem ℓ, então suas alturas medem $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.*

Ainda sobre o triângulo equilátero ABC, precisaremos mais adiante do seguinte fato: como $ABM \equiv ACM$, temos também que $B\widehat{A}M = C\widehat{A}M$; mas, como $B\widehat{A}M + C\widehat{A}M = B\widehat{A}C = 60°$, segue que

$$B\widehat{A}M = C\widehat{A}M = 30°.$$

2 Trigonometria em triângulos retângulos

Consideremos novamente um triângulo ABC retângulo em A, como na figura 6. Denotando $\widehat{B} = \beta$ (lê-se beta) e $\widehat{C} = \gamma$ (lê-se gamma), sabemos que $\beta + \gamma = 90°$, logo, $0° < \beta, \gamma < 90°$. Assim, os ângulos $\angle B$ e $\angle C$ de ABC são agudos.

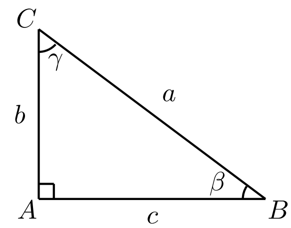

Figura 6: o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo ABC.

A seguir, associaremos a cada um dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$ de ABC três números reais positivos, conhecidos como seus **arcos trigonométricos**. Conforme veremos ao longo desse módulo, a introdução desses números muitas vezes simplificará bastante o estudo da geometria de triângulos, mesmo daqueles que não são retângulos.

O primeiro dos arcos trigonométricos associados a um ângulo agudo de ABC é seu **seno**, o qual é definido como o quociente

$$\text{seno} = \frac{\text{comprimento do cateto oposto ao ângulo}}{\text{comprimento da hipotenusa do triângulo}}.$$

O **cosseno** desse ângulo é definido como o quociente

$$\text{cosseno} = \frac{\text{comprimento do cateto adjacente ao ângulo}}{\text{comprimento da hipotenusa do triângulo}}.$$

Por fim, a **tangente** desse mesmo ângulo é definida como o quociente

$$\text{tangente} = \frac{\text{comprimento do cateto oposto ao ângulo}}{\text{comprimento do cateto adjacente ao ângulo}}.$$

Abreviando seno por **sen**, cosseno por **cos** e tangente por **tg**, temos, nas notações da figura 6, que

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}, \quad \cos\beta = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{c}{b}, \tag{1}$$

ao passo que

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{c}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{b}{c}. \tag{2}$$

Veja que, como $b, c < a$ (pois a é o comprimento da hipotenusa), temos $0 < \frac{b}{a}, \frac{c}{a} < 1$, isto é,

$$0 < \operatorname{sen}\beta, \cos\beta < 1.$$

(Evidentemente, também temos $0 < \operatorname{sen}\gamma, \cos\gamma < 1$.)

Exemplo 3. *Se, na figura 6, tivermos $b = 3$ e $c = 4$, então o Teorema de Pitágoras garante que*

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Portanto, nesse caso, teremos

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5} = \cos\gamma, \quad \cos\beta = \frac{4}{5} = \operatorname{sen}\gamma$$

e

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{4}{3}.$$

A igualdade de senos e cossenos do exemplo acima não é mera coincidência. De fato, as relações (1) e (2) nos dão

$$\operatorname{sen}\beta = \cos\gamma, \quad \cos\beta = \operatorname{sen}\gamma \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}, \qquad (3)$$

Como $\beta + \gamma = 90°$, temos $\gamma = 90° - \beta$, de modo que muitas vezes escrevemos as igualdades acima como

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\beta = \cos(90° - \beta) \\ \cos\beta = \operatorname{sen}(90° - \beta) \end{cases} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}(90° - \beta)}. \qquad (4)$$

Resumimos em palavras as igualdades acima da seguinte forma:

> o seno de um ângulo agudo é o cosseno de seu complemento, e vice-versa; a tangente de um ângulo é o inverso da tangente de seu complemento.

Retomemos, agora, os exemplos 1 e 2.

Exemplo 4. *Nas notações da figura 3, seja ABC retângulo em A e isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC} = \ell$. Vimos que $\overline{BC} = \ell\sqrt{2}$ e $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$. Portanto,*

$$\operatorname{sen} 45° = \operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 45° = \cos\widehat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\ell}{\ell} = 1.$$

Nas notações da figura 5, se ABC é equilátero de lado ℓ e M é o ponto médio de BC, vimos que $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$ e $\overline{AM} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Como o triângulo ABM é retângulo em M e tal que $A\widehat{B}M = 60°$, temos

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60° = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\ell/2}{\ell} = \frac{1}{2}$$

e

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell/2} = \sqrt{3}.$$

Por fim, podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente de 30° ou como acima (usando o fato de que $B\widehat{A}M = 30°$ – faça isso!), ou invocando as relações (3), com $\beta = 30°$ e $90° - \beta = 60°$:

$$\operatorname{sen} 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\operatorname{tg} 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Para uso futuro, resumimos na tabela abaixo os valores calculados no exemplo anterior:

β	$30°$	$45°$	$60°$
$\operatorname{sen}\beta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\beta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\beta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Nos cálculos do exemplo anterior, tomando um comprimento ℓ qualquer, obtivemos sempre os mesmos valores para o seno, o cosseno e a tangente de 30°, 45° e 60°. Isso sugere a validade da seguinte propriedade:

> os arcos trigonométricos de um ângulo agudo só dependem da medida do ângulo, e não do tamanho do triângulo retângulo utilizado para calculá-los.

Para entender porque a afirmação acima é verdadeira, tomemos (cf. figura 7) dois triângulos ABC e $A'B'C'$, retângulos em A e A' e tais que $\widehat{B} = \widehat{B}' = \beta$. Como $\widehat{A} =$

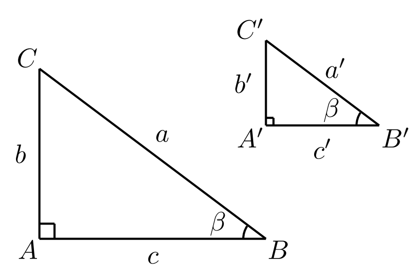

Figura 7: arcos trigonométricos só dependem do ângulo.

$\widehat{A}' = 90°$ e $\widehat{B} = \widehat{B}' = \beta$, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, pelo caso AA (ângulo-ângulo) de semelhança de triângulos. Portanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}. \qquad (5)$$

Trocando os meios da proporcão dada pela primeira igualdade acima, obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

ou, o que é o mesmo, $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$. Portanto, a definição de $\cos\beta$, aplicada ao triângulo ABC ou ao triângulo $A'B'C'$, dá como resultado números reais iguais ($\frac{c}{a}$ no primeiro caso e $\frac{c'}{a'}$ no segundo caso).

Trocando os extremos da proporção dada pela segunda igualdade em (5), obtemos

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

ou, o que é o mesmo, $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$. Portanto, a definição de $\operatorname{sen}\beta$, aplicada ao triângulo ABC ou ao triângulo $A'B'C'$, também fornece dá números reais iguais como resultado.

Por fim, também segue de (5) que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$. Trocando os extremos dessa proporção, obtemos

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC}}$$

e concluímos que a definição de $\operatorname{tg}\beta$ também independe do triângulo que considerarmos, ABC ou $A'B'C'$.

A discussão acima dá uma maneira simples de, conhecendo o seno ou o cosseno de um ângulo, calcular seus outros dois arcos trigonométricos. Vejamos como fazer isso no próximo exemplo.

Exemplo 5. *Sabendo que* $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{3}$*, calcule* $\cos\beta$ *e* $\operatorname{tg}\beta$.

Solução. Pela discussão acima, para calcular $\cos\beta$ e $\operatorname{tg}\beta$ podemos tomar um triângulo ABC de tamanho qualquer, contanto que $\widehat{A} = 90°$ e $\widehat{B} = \beta$. Suponhamos, pois (cf. figura 1), que $\overline{AC} = 1$, e sejam $\overline{BC} = a$ e $\overline{AB} = c$. Como

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{a},$$

temos $\frac{1}{a} = \frac{1}{3}$, de modo que $a = 3$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$c^2 = \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = 3^2 - 1^2 = 8$$

e, daí, $c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Logo,

$$\cos\beta = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{c} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

□

Conforme o próximo exemplo deixa claro, o fato de os valores do seno, cosseno e tangente de β não dependerem do triângulo ABC retângulo em A escolhido, mas somente do fato de que $\widehat{B} = \beta$, também é uma das razões da importância prática do estudo da Trigonometria (i.e., dos arcos trigonométricos) de um triângulo retângulo.

Exemplo 6. *Em uma manhã de domingo, Marcos saiu para um passeio no campo e, no meio do caminho, decidiu subir o flanco menos íngreme de uma grande colina, que tem o formato aproximado de uma rampa retilínea, inclinada de* $30°$ *em relação à horizontal. Ele caminhou por aproximadamente* 10 *minutos, à velocidade média de* $4km/h$*, até chegar ao topo da colina. Ao chegar lá, ele olhou para baixo e ficou impressionado com a altura em que se encontrava. Calcule, aproximadamente, o valor dessa altura.*

Solução. Como 10 minutos equivale a $\frac{1}{6}$ de hora, Marcos caminhou aproximadamente $4\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{6}\text{h} = \frac{2}{3}\text{km}$. Na figura 8,

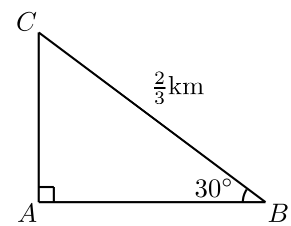

Figura 8: a caminhada de Marcos.

B representa o pé da colina, C seu topo e A o ponto, ao nível de B, imediatamente abaixo de C. Então, conforme mostrado na figura, temos que $\widehat{A} = 90°$ e $\overline{AC}$ é a altura do topo da colina.

Como $\widehat{B} = 30°$ e $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, aplicando a definição do seno de $\widehat{B}$ ao triângulo ABC, obtemos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}.$$

Mas, como $\overline{BC} \approx \frac{2}{3}\text{km}$, segue que

$$\overline{AC} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\text{km} = \frac{1}{3}\text{km} = 333\text{m}.$$

□

3 A relação fundamental da Trigonometria

Voltando a (1), observe que (nas notações da figura 6)

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\beta.$$

Portanto, se já tivermos calculado o seno e o cosseno de um ângulo, podemos calcular sua tangente simplesmente calculando o quociente entre o seno e o cosseno, respectivamente. Em suma,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}. \tag{6}$$

A seguir, isolamos outra propriedade importante do seno e do cosseno de um ângulo agudo, a qual é conhecida como a **relação fundamental da Trigonometria**.

Proposição 7. *Seja ABC um triângulo retângulo em A. Se $\widehat{B} = \beta$, então*

$$(\operatorname{sen}\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1. \tag{7}$$

Prova. Novamente nas notações da figura 6, temos $\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}$ e $\cos\beta = \frac{c}{a}$. Por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras, também temos $b^2 + c^2 = a^2$. Portanto,

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen}\beta)^2 + (\cos\beta)^2 &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\\ &= \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.\end{aligned}$$

□

As relações (6) e (7) são importantes, dentre outras razões, porque elas nos permitem utilizar Álgebra elementar para calcular o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo se conhecermos somente um desses números. Vejamos como fazer isso em dois exemplos, o primeiro dos quais revisita o exemplo 5.

Exemplo 8. *Em um triângulo ABC retângulo em A, temos $\widehat{B} = \beta$. Sabendo que $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{3}$, calcule $\cos\beta$ e $\operatorname{tg}\beta$.*

Solução. Segue de (7) que

$$(\cos\beta)^2 = 1 - (\operatorname{sen}\beta)^2.$$

Substituindo $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{3}$, obtemos

$$(\cos\beta)^2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

e, daí,

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Por fim, segue de (6) que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

□

Exemplo 9. *Em um triângulo ABC retângulo em A, temos $\widehat{B} = \beta$. Sabendo que $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, calcule $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\beta$.*

Solução. Nesse caso, (6) e (7) nos dão as igualdades

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad (\operatorname{sen}\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1.$$

Portanto, para calcular $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\beta$, temos de ver essas duas igualdades como um sistema de equações cujas incógnitas são $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\beta$; em seguida, temos de resolver esse sistema, lembrando que $\operatorname{sen}\beta, \cos\beta > 0$.

Para simplificar a notação, escrevamos $x = \operatorname{sen}\beta$ e $y = \cos\beta$, de modo que

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

A primeira igualdade nos dá $x = \frac{y}{2\sqrt{2}}$. Substituindo essa relação na segunda igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}1 &= x^2 + y^2 = \left(\frac{y}{2\sqrt{2}}\right)^2 + y^2\\ &= \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} + y^2 = \frac{y^2}{8} + y^2.\end{aligned}$$

Como $\frac{y^2}{8} + y^2 = \frac{9y^2}{8}$, segue que $1 = \frac{9y^2}{8}$ ou, ainda, $y^2 = \frac{8}{9}$. Portanto, lembrando que y é positivo, obtemos

$$y = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Então,

$$x = \frac{y}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}/3}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

□

Terminamos essa aula apresentando mais um exemplo, que mostra como podemos utlizar o que aprendemos até aqui para calcular $\operatorname{sen}15^\circ$, $\cos 15^\circ$ e $\operatorname{tg}15^\circ$.

Exemplo 10. *Na figura 9, temos $\overline{BC} = 2$ e $A\widehat{B}C = 30^\circ$. Portanto, $\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ e $\overline{AC} = \overline{BC} \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.*

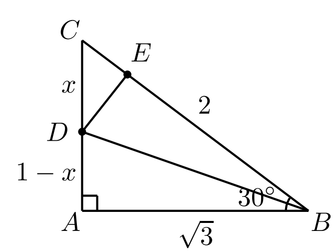

Figura 9: calculando tg 15°.

Seja D o ponto sobre o segmento AC tal que BD bissecta *esse ângulo, isto é, tal que $A\widehat{B}D = D\widehat{B}C = 15^\circ$. Também, seja E o pé da perpendicular baixada do ponto D à hipotenusa BC, de sorte que o triângulo CDE é retângulo em E. Como $D\widehat{C}E = A\widehat{C}B = 90^\circ - A\widehat{B}C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, a trigonometria do triângulo CD nos dá*

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Logo, fazendo $\overline{CD} = x$, segue da igualdade acima que

$$\overline{CE} = \overline{CD} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{2}.$$

Por outro lado, nos triângulos ABD e EBD, temos que BD é um lado comum, $A\widehat{B}D = E\widehat{B}D = 15^\circ$ e $D\widehat{A}B = D\widehat{E}B = 90^\circ$. Portanto, tais triângulos são congruentes, pelo caso ALA de congruência de triângulos. Segue que $\overline{BE} = \overline{AB} = \sqrt{3}$ e, daí,

$$2 = \overline{BC} = \overline{CE} + \overline{BE} = \frac{x}{2} + \sqrt{3}.$$

Resolvendo a equação acima, obtemos $x = 2(2 - \sqrt{3})$.

Por fim,

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \overline{AC} - \overline{CD} = 1 - x\\ &= 1 - 2(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3,\end{aligned}$$

e a trigonometria do triângulo ABD fornece

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

A partir daí, deixamos como exercício para você imitar o exemplo anterior para obter

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \quad e \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}.$$

Dicas para o Professor

Reserve uma sessão de 50min para a primeira seção e duas sessões de 50min para cada uma das outras duas seções. Na segunda seção, enfatize que as relações (4) e a tabela de valores do seno, cosseno e tangente de ângulos notáveis devem ser memorizadas, para uso futuro. Você também deve chamar a atenção dos alunos para a importância da independência dos arcos trigonométricos em relação a dois triângulos retângulos semelhantes, uma vez que essa propriedade é que realmente dá flexibilidade de aplicação à Trigonometria de triângulos retângulos. Por fim, a terceira seção traz um resultado muito importante, que é a relação fundamental da Trigonometria. Junto com ela, os três exemplos da seção devem ser resolvidos em detalhe.

A referência [2], a seguir, contém exemplos e exercícios simples, que podem ajudá-lo na condução das sessões. A referência [1] (também a seguir) expande o material aqui discutido, trazendo vários problemas mais difíceis.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2013.