Material Teórico - Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Números Irracionais e Reais

Oitavo Ano

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal da OBMEP

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Os números irracionais

Ao longo deste módulo, vimos que a representação decimal de um número racional pode ser finita ou infinita. No segundo caso, a representação decimal se dá por meio de dízimas periódicas. Pode-se mostrar que quando dividimos o numerador pelo denominador de uma fração, com o objetivo de encontrar a sua representação decimal, sempre encontramos um decimal finito ou uma dízima periódica. Agora, observe o exemplo abaixo:

Exemplo 1. *O número cuja representação decimal é* $0,01001000100001\ldots$, *onde em cada passo acrescenta-se um zero a mais entre dois algarismos um, não é uma dízima periódica, pois há sequências tão grandes quanto queiramos, formadas somente por algarismos iguais a zero e contidas na sua parte decimal. Portanto, esse número não é a representação decimal de um número racional.*

Podemos concluir que há representações decimais que não têm como origem um número racional. Um **número irracional** é um número que possui representação decimal infinita e não periódica. O número dado no exemplo 1, cuja representação decimal é $0,01001000100001\ldots$, é, portanto, um número irracional.

Exemplo 2. *Considere um quadrado de lado igual a* $1cm$, *como na figura 1.*

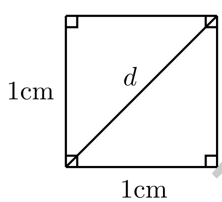

Figura 1: O número irracional $\sqrt{2}$.

Pelo teorema de Pitágoras, sua diagonal satizfaz $d^2 = 2$. *Afirmamos que tal número não pode ser racional. De fato, se tivéssemos* $d = \frac{p}{q}$ *com* $p, q \in \mathbb{N}$, *então* $p^2 = d^2q^2$, *donde* $p^2 = 2q^2$. *Mas, como todo quadrado tem um número par de fatores iguais a* 2, *concluímos, a partir dessa igualdade, que deveríamos ter um número par de fatores* 2 *do lado esquerdo da igualdade e um número ímpar de fatores* 2 *do lado direito; isso não pode acontecer, pois o modo como fatoramos um natural maior que* 1 *como um produto de números primos é único.*

O número d *é chamado raiz quadrada de* 2 *e é denotado por* $\sqrt{2}$.

Uma pergunta que surge a essa altura é: qual é a representação decimal de $\sqrt{2}$? Para responder a essa pergunta, precisamos de propriedades que serão discutidas na seção 2.

Exemplo 3. *Outro número irracional que merece atenção é o número* π, *definido como o quociente entre a circunferência de um círculo e o comprimento de seu diâmetro. Embora a irracionalidade de* π *seja um fato bem conhecido, uma justificativa desse fato não é elementar e está fora dos objetivos desse material. Registramos que*

$$\pi = 3,14159\ldots,$$

onde, no segundo membro acima, os cinco algarismos mostrados após a vírgula são os corretos. Nesse caso, escrevemos também

$$\pi \cong 3,14159,$$

e dizemos que $3,14159$ aproxima π com cinco casas decimais corretas.

2 Os números reais

O **conjunto dos números reais**, que é denotado por $\mathbb{R}$, é a reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Os elementos de $\mathbb{R}$ são chamados **números reais**.

Pode-se mostrar que, no conjunto dos números reais, a extração de raízes de números naturais sempre tem sentido. Assim, dados inteiros positivos m e n, escrevemos $\sqrt[n]{m}$ para denotar o número real que, elevado a n, dá, como resultado, o número m:

$$(\sqrt[n]{m})^n = m.$$

Por exemplo, $\sqrt[3]{5}$ é o número real que, elevado ao cubo, é igual a 5; em símbolos, $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$.

Também pode ser mostrado que ou m é uma n-ésima potência perfeita e, neste caso, $\sqrt[n]{m}$ é um número inteiro, ou então (generalizando o exemplo 2) $\sqrt[n]{m}$ é um número irracional. Esse é o caso, por exemplo, de $\sqrt[3]{5}$: como 5 não é um cubo perfeito, concluímos que $\sqrt[3]{5}$ é um número irracional.

O conjunto $\mathbb{R}$ possui operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, que são extensões das operações conhecidas em $\mathbb{Q}$ e, além disso, satisfazem as mesmas propriedades que satisfazem em $\mathbb{Q}$. A relação de ordem conhecida em $\mathbb{Q}$ também se estende a $\mathbb{R}$, satisfazendo as mesmas propriedades que satisfaz em $\mathbb{Q}$.

Mais precisamente, as operações de adição $+$ e multiplicação $\cdot$ de $\mathbb{Q}$ se estendem a $\mathbb{R}$ e possuem as seguintes propriedades, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(i) As operações $+$ e $\cdot$ são **comutativas**, isto é,

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

Por exemplo, $3 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 3$ e $3 \cdot \pi = \pi \cdot 3$.

(ii) As operações $+$ e $\cdot$ são **associativas**, isto é,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Portal da OBMEP

Por exemplo, $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{3}\right)+5=\sqrt{2}+\left(\frac{1}{3}+5\right)$ e $\left(\sqrt[3]{8}\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot 3=\sqrt[3]{8}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot 3\right)$.

(iii) A operação $\cdot$ é **distributiva** em relação à operação $+$, isto é,

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c).$$

Por exemplo, $4\cdot(\sqrt{3}+7)=(4\cdot\sqrt{3})+(4\cdot 7)$.

(iv) Os números 0 e 1 são, respectivamente, os **elementos neutros** para as operações $+$ e $\cdot$. Isso significa que

$$a+0=a \quad \text{e} \quad a\cdot 1=a,$$

para todo $a\in\mathbb{R}$. Por exemplo, $\pi+0=\pi$ e $\sqrt[5]{25}+0=\sqrt[5]{25}$.

(v) Dado $a\in\mathbb{R}$, existe um único número número real, o qual denotamos por $-a$, tal que

$$a+(-a)=0.$$

Além disso, se $a\neq 0$, então também existe um único número real, que é denotado por a^{-1}, tal que

$$a\cdot a^{-1}=1.$$

Os números reais $-a$ e a^{-1} são chamados, respectivamente, de **oposto** (ou **simétrico**) e **inverso** de a. Também denotamos o inverso de a por $\frac{1}{a}$, sempre que for conveniente. Por exemplo, o oposto de $\sqrt{8}$ é $-\sqrt{8}$ e o seu inverso é $\sqrt{8}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{8}}$.

Podemos definir as operações de subtração e divisão de números reais, respectivamente, por

$$a-b=a+(-b) \quad \text{e} \quad a\div b=a\cdot b^{-1}.$$

Observe que $a\div b$ só faz sentido se $b\neq 0$.

Para $a,b\in\mathbb{R}$ escrevemos $a\geq b$ para denotar que a **é maior do que ou igual a** b. Esta é a relação de ordem em $\mathbb{R}$, a qual, conforme já mencionamos, estende a relação de ordem em $\mathbb{Q}$. Escrevemos também $a\leq b$ com o mesmo sentido de $b\geq a$, mas, neste caso, lemos a **é menor do que ou igual a** b.

Escrevemos ainda $a>b$ para denotar que a **é maior do que** b, isto é, que $a\geq b$ e $a\neq b$; por fim, escrevemos $a<b$ para denotar que a **é menor do que** b, isto é, que $a\leq b$ e $a\neq b$.

Se $a>0$, dizemos que a é **positivo** e, se $a<0$, dizemos que a é **negativo**.

A relação de ordem $\geq$ em $\mathbb{R}$ satisfaz as propriedades abaixo, para quaisquer $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(i) Se $a>0$ e $b>0$, então $a+b>0$ e $a\cdot b>0$.

(ii) Para $a,b\in\mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas $a>b$, $a<b$ ou $a=b$.

(iii) $a>b$ se, e somente se, $a-b>0$.

(iv) Se $a\geq b$ e $b\geq a$, então $a=b$.

(v) Se $a\geq b$ e $b\geq c$, então $a\geq c$.

(vi) Se $a\geq b$, então $a+c\geq b+c$.

(vii) Se $a\geq b$ e $c>0$, então $a\cdot c\geq b\cdot c$. Por outro lado, se $a\geq b$ e $c<0$, então $a\cdot c\leq b\cdot c$.

Sejam dados dois reais $a,b>0$. Se $a>b$, então, utilizando sucessivamente as propriedades (vii) e (v), obtemos

$$\begin{aligned} a>b>0 &\Longrightarrow a\cdot a>b\cdot a \ \text{ e } \ a\cdot b>b\cdot b\\ &\Longrightarrow a^2>ab \ \text{ e } \ ab>b^2\Longrightarrow a^2>b^2.\end{aligned}$$

Reciprocamente, sejam $a,b>0$ tais que $a^2>b^2$. Então, $a\neq b$, de forma que, pela propriedade (ii), $a>b$ ou $a<b$. Se fosse $a<b$, então, como $a,b>0$, o argumento do parágrafo anterior (utilizado com a no lugar de b e b no lugar de a) nos daria $a^2<b^2$, o que não é o caso. Logo, a única possibilidade é que seja $a>b$.

Podemos resumir a discussão dos dois parágrafos acima na seguinte propriedade:

(viii) Se a e b são números reais positivos, então

$$a>b\Longleftrightarrow a^2>b^2,$$

ou, de uma forma equivalente,

$$a>b\Longleftrightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}.$$

A propriedade (viii) pode ser utilizada para estimar raízes quadradas, conforme mostrado pelos dois exemplos a seguir.

Exemplo 4. *Voltando à pergunta feita na seção 1, sobre a representação decimal de $\sqrt{2}$, utilizando a propriedade (viii), obtemos:*

$$1<2<4\Longrightarrow\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}\Longrightarrow 1<\sqrt{2}<2.$$

Daí, já sabemos que $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2. Agora, utilizando a mesma propriedade, segue de

$$1,4^2=1,96<2<2,25=1,5^2$$

que

$$1,4=\sqrt{1,96}<\sqrt{2}<\sqrt{2,25}=1,5.$$

Analogamente,

$$1,41^2=1,9881<2<2,0164=1,42^2$$

implica, pela propriedade (vii),

$$1,41=\sqrt{1,9881}<\sqrt{2}<\sqrt{2,0164}=1,42.$$

Prosseguindo com esse raciocínio, podemos verificar facilmente que

$$\sqrt{2}=1,4142\ldots,$$

onde, no segundo membro acima, os quatro primeiros algarismos após a vírgula são os corretos.

Portal da OBMEP

Exemplo 5. *Raciocinando como no exemplo anterior, temos*

$$2,89 < 3 < 3,24 \Longrightarrow \sqrt{2,89} < \sqrt{3} < \sqrt{3,24}$$
$$\Longrightarrow 1,7 < \sqrt{3} < 1,8.$$

Agora, como

$$1,73^2 = 2,9929 < 3 < 1,74^2 = 3,0276,$$

temos da propriedade (viii) que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$. *Prosseguindo analogamente, cheque que*

$$\sqrt{3} \cong 1,7320,$$

com quatro casas decimais corretas.

Terminamos esta seção observando que os conjuntos numéricos

$$\mathbb{N} = \{0, 1\ 2, 3 \ldots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1\ 2, 3 \ldots\}$$

e

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | \, m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\right\}$$

satisfazem a seguinte sequência de inclusões de conjuntos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Além disso, o conjunto dos números reais também contém o conjunto dos números irracionais. De fato, se denotarmos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{Q}'$, então $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$.

3 Representação geométrica

Daremos, agora, uma ideia de como um número racional (fração) pode ser representado geometricamente sobre uma reta r. Para tanto, escolhemos um ponto O em r para representar o 0, uma das semirretas com origem em O para ser **positiva** (a outra será **negativa**) e um outro ponto P, agora na semirreta positiva, para representar o 1. O segmento OP será a unidade de comprimento utilizada. Por exemplo, para marcar o número $\frac{8}{3} = 2,666\ldots$ sobre r, marcamos na semirreta positiva um segmento OQ, que tem oito vezes a medida de OP. O ponto Q representará o número 8. Daí, marcamos, ainda sobre a semirreta positiva, o segmento OR, cuja medida é um terço de OQ. O ponto R representará o número $\frac{8}{3}$ (veja a figura 2).

Observe que nada do que foi utilizado para marcar o número $\frac{8}{3}$ na reta r impede que façamos o mesmo com qualquer outra fração positiva. Para marcar as frações negativas, realizamos um procedimento inteiramente análogo, mas na semirreta negativa.

Então, qualquer número racional pode ser representado sobre r. E quanto à recíproca? Isto é, com a representação dada pela figura 2, todo ponto de r representa um número

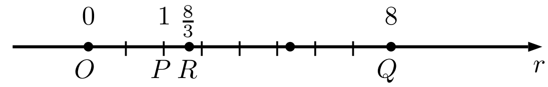

Figura 2: Representação geométrica dos racionais.

racional? A resposta a essa pergunta é não! De fato, pode-se mostrar que existe uma infinidade de pontos sobre r que não representam número racional algum.

Mais precisamente, pode-se mostrar que os pontos de r que não representam números racionais são exatamente aqueles que representam os números irracionais. Dessa forma, concluímos que todo número real pode ser representado em r, e todo ponto de r representa exatamente um número real, o qual pode ser racional ou irracional.

Vejamos um exemplo importante.

Exemplo 6. *Como na figura 2, seja* P *o ponto, sobre a reta* r*, que representa o número* 1. *Agora, considere o quadrado* $OPQR$ *de lado* 1 *(veja a figura 3). Por fim, marque (conforme mostrado na figura 3) um ponto* T *na semirreta positiva de modo que* $OQ \equiv OT$. *O ponto* T *não pode representar um número racional, pois, como já vimos, a medida da diagonal de um quadrado de lado* 1*, que é igual a* $\sqrt{2}$*, é um número irracional.*

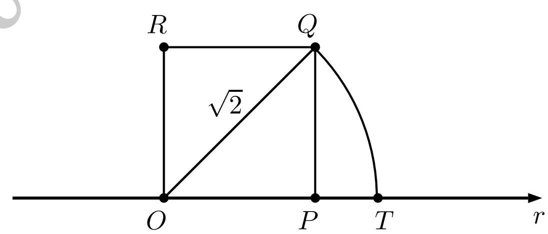

Figura 3: Representação geométrica de $\sqrt{2}$.

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para cada uma das três seções que compõem esta aula. Na seção 1, chame atenção para a existência de números com representação decimal infinita e não periódica, que são os números irracionais. Na seção 2, saliente as propriedades das operações aritméticas e da relação de ordem em $\mathbb{R}$. Finalmente, na seção 3, explique como os números racionais podem ser marcados sobre uma reta e, também, justifique a existência de pontos sobre a reta que não representam números racionais.

Portal da OBMEP

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. J. Ferreira. *A construção dos Números.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 20013.

Portal da OBMEP