Material Teórico - Módulo Notação Algébrica e Introdução às Equações

Parte 1 - Notação Algébrica

7º ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de abril de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Expressões algébricas

Iniciamos esta aula com o seguinte exemplo:

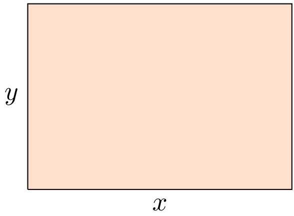
Exemplo 1 (Enigma de Diofanto). *Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto. E os números podem mostrar (milagre!) quão longa foi a sua vida, cuja sexta parte foi a sua bela infância. Tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu rosto se cobriu de pelos. E a sétima parte de sua existência decorreu com um casamento estéril. Passou mais um quinquênio e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogênito, cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai, que, com muita pena de todos, desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho. Quantos anos Diofanto tinha quando morreu?*

Antes de discutirmos o Enigma de Diofanto, vamos fazer algumas considerações e definir alguns conceitos. Em muitas situações, é conveniente denotar um número real arbitrário por uma letra, com o objetivo de fazer operações com esse número mesmo sem saber o seu valor. Por exemplo, se denotarmos um número real por x, então seu dobro será $2x$, seu triplo $3x$, sua metade $\frac{1}{2}x$, sua terça parte $\frac{1}{3}x$, seu quadrado x^2 e seu cubo x^3.

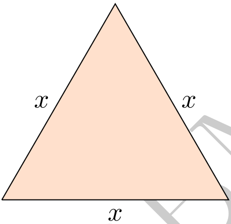
Números reais arbitrários são chamados **variáveis**. Denotaremos variáveis utilizando as letras minúsculas do nosso alfabeto: x, y, z, etc. Uma **expressão algébrica** é o resultado de um número finito de operações (escolhidas dentre adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) entre variáveis, sempre que os resultados de tais operações fizerem sentido no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. As expressões algébricas serão denotadas por letras maiúsculas: E, F, G, etc.

A seguir, listamos algumas situações que ilustram o uso de expressões algébricas.

- O perímetro e a área do retângulo cujos lados medem x e y são dados, respectivamente, pelas expressões algébricas $P = 2x + 2y$ e $A = xy$.

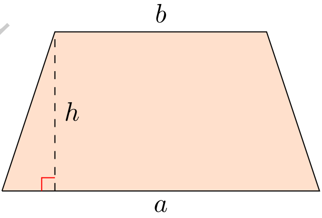


- O perímetro do triângulo equilátero cujos lados medem x é dado pela expressão algébrica $P = 3x$.



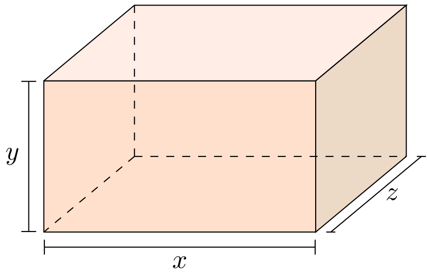
- A área do trapézio na figura abaixo é dada pela expressão algébrica

$$A = \frac{(a+b)\cdot h}{2}.$$



- A área da superfície de um paralelepípedo reto retângulo cujas dimensões são iguais a x, y e z é igual a

$$A = 2(xy + xz + yz).$$



Agora, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 2. *Na fazenda de Artur há x porcos e y galinhas.*

(a) *Qual é a expressão numérica que corresponde ao total de animais na fazenda?*

(b) *Qual é a expressão algébrica que indica o número que encontramos ao contar as patas de todos os animais existentes na fazenda?*

Solução.

(a) Como na fazenda há x porcos e y galinhas, a expressão algébrica correspondente à quantidade total de animais da fazenda é $A = x + y$.

(b) Uma vez que cada porco tem quatro pés e há x porcos, a quantidade de pés relativas aos porcos é $4x$. Analogamente, como há y galinhas e cada galinha tem dois pés, há $2y$ pés referentes às galinhas. Assim, o número de pés de todos os animais da fazenda é dado pela expressão algébrica $T = 4x + 2y$.

$\square$

1.1 Valores numéricos de expressões algébricas

Quando atribuímos valores (números reais) às variáveis que compõem uma expressão algébrica, obtemos uma expressão numérica. O resultado dessa expressão numérica é o **valor numérico** da expressão algébrica para aqueles valores que foram atribuídos às suas variáveis. Por exemplo, o valor numérico da expressão algébrica

$$E(x,y) = 4x^2 - 5xy + 3y^2$$

para os valores $x = 2$ e $y = 3$ é

$$4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 4 \cdot 4 - 30 + 3 \cdot 9 = 16 - 30 + 27 = 13.$$

Vejamos mais alguns exemplos:

Exemplo 3. *Qual a área do trapézio cujas bases medem 3cm e 2cm, e cuja altura mede 4cm?*

Solução. Sabemos que a área do trapézio é dada por

$$A = \frac{(a+b)\cdot h}{2},$$

em que a e b são as medidas das bases e h é a medida da altura do trapézio. Atribuindo os valores $a = 3\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{cm}$ e $h = 4\,\text{cm}$, obtemos

$$A = \frac{(3+2)\cdot 4}{2} = 10\,\text{cm}^2.$$

□

Exemplo 4. *Calcule o valor numérico da expressão algébrica* $E(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ *para* $x = -1$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} E(-1) &= (-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 \\ &= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

□

2 A solução do Enigma de Diofanto

Para resolver o Enigma de Diofanto, observe inicialmente que, se denotarmos por x a idade que Diofanto tinha quando morreu, temos que a sexta parte, a duodécima parte, a sétima parte e a metade dessa idade são dadas, respectivamente, por $x/6$, $x/12$, $x/7$ e $x/2$.

Além disso, como "a sexta parte de sua vida foi na infância, tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida quando seu rosto se cobriu de pelos, a sétima parte com seu casamento, mais um quinquênio – 5 anos – e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogênito, que viveu metade da vida de seu pai, que, por sua vez, morreu quatro anos depois do filho", temos que a idade com que Diofanto morreu também pode ser dada pela expressão

$$I(x) = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4.$$

Como x é a própria idade de Diofanto ao morrer, o valor de x deve ser tal que a igualdade

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \qquad (1)$$

seja verdadeira. Chamamos **equação** a uma igualdade como essa, em que uma ou mais variáveis aparecem em ambos os lados.

Há vários tipos de equações importantes em Matemática: equações *de primeiro grau*, *de segundo grau*, *de terceiro grau*, *trigonométricas*, *logarítmicas*, *exponenciais*, etc, e você gastará um tempo considerável aprendendo como *resolvê-las*, isto é, como encontrar o(s) valor(es) de x que tornam a igualdade verdadeira.

Note que x desempenha, na discussão acima, dois papeis distintos: por um lado, na igualdade

$$I(x) = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4,$$

podemos *variá-lo* conforme queiramos, razão pela qual ele recebe o nome de *variável*; assim é que, por exemplo,

$$I(48) = \frac{48}{6} + \frac{48}{12} + \frac{48}{7} + 5 + \frac{48}{2} + 4 = 45 + \frac{48}{7}.$$

Por outro lado, resolver a equação (1) (ou qualquer outra) significa encontrar o(s) valor(es) de x que tornam a igualdade verdadeira. Tais valores estão *escondidos* ou, pra usar uma palavra mais antiga do Português, *incógnitos*; por essa razão, numa equação não chamamos x de variável, mas de **incógnita**.

Na equação do Enigma de Diofanto, a incógnita x vale $x = 84$. Realmente,

$$84 = \frac{84}{6} + \frac{84}{12} + \frac{84}{7} + 5 + \frac{84}{2} + 4$$

é uma igualdade verdadeira. Mas, como chegar ao valor $x = 84$ sem adivinhá-lo?

A equação do Enigma de Diofanto é um tipo particular de *equação de primeiro grau*, e um dos objetivos do próximo módulo será ensinar, de maneira sistemática, como resolver tais equações. Em particular, após estudá-lo, resolver a equação (1) será uma tarefa corriqueira, de forma que você poderá voltar a este material e completar sua leitura.

Assim, para não deixar o enigma sem resposta, anteciparemos, agora, como resolver (1). Alertamos, contudo, que a essa altura talvez você ache o que segue demasiadamente complexo. Se for assim, então sugerimos que pule para o próximo material e, como já frisamos, retome a leitura quando já estiver familiarizado com a resolução de equações de primeiro grau.

Para resolver (1), começamos reescrevendo o segundo membro, perfazendo a soma de frações que nele aparece:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = \\ &= \frac{14x + 7x + 12x + 84 \cdot 5 + 42x + 84 \cdot 4}{84} \\ &= \frac{75x + 84 \cdot 9}{84}. \end{aligned}$$

Agora, substituímos essa última expressão no segundo membro de (1), obtendo a igualdade

$$x = \frac{75x + 84 \cdot 9}{84}.$$

Se tal igualdade for verdadeira, então, multiplicando os dois lados por 84, continuaremos com uma igualdade verdadeira. (Escolhemos 84 por ser o denominador do segundo membro.) Assim,

$$84x = 84\left(\frac{75x + 84 \cdot 9}{84}\right),$$

logo,

$$84x = 75x + 84 \cdot 9.$$

Por sua vez, subtraindo $75x$ de ambos os lados, continuaremos com uma igualdade verdadeira, qual seja,

$$84x - 75x = 75x + 84 \cdot 9 - 75x.$$

Então,

$$9x = 84 \cdot 9$$

e, dividindo os dois lados por 9, chegamos finalmente a

$$\frac{9x}{9} = \frac{84 \cdot 9}{9},$$

de forma que $x = 84$.

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas uma ou duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material, conforme a turma seja menos ou mais madura, matematicamente. Caso a turma tenha mais maturidade matemática, utilize a segunda sessão para resolver o Enigma de Diofanto. Após fazê-lo, enfatize a diferença entre variável e incógnita, pois alguns alunos também costumam confundir esses conceitos. Uma boa estratégia é apresentar outras situações para ajudá-los a discernir tais papeis.

A referência a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 1*: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.