Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 2 - Volumes e Áreas de Prismas e Pirâmides

Pirâmides

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

12 de agosto de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta aula, veremos a definição de pirâmide e estudaremos seus principais elementos. Aprenderemos, também, a calcular o volume de pirâmides.

1 Definição de pirâmide

Embora já tenhamos falado sobre pirâmides na aula anterior (sobre volumes e o princípio de Cavalieri), ainda não demos uma definição formal desse objeto. Faremos isso nesta seção.

Vamos apresentar a pirâmide como um análogo tridimensional do triângulo. Para isso, vamos procurar, primeiramente, uma definição de triângulo que possa ser generalizada para dimensões maiores.

Se A, B e C são três pontos não colineares, para cada ponto P pertencente ao segmento de reta AB, consideremos o segmento CP. A união desses segmentos é uma região do plano chamada de *triângulo* de vértices A, B e C.[1]

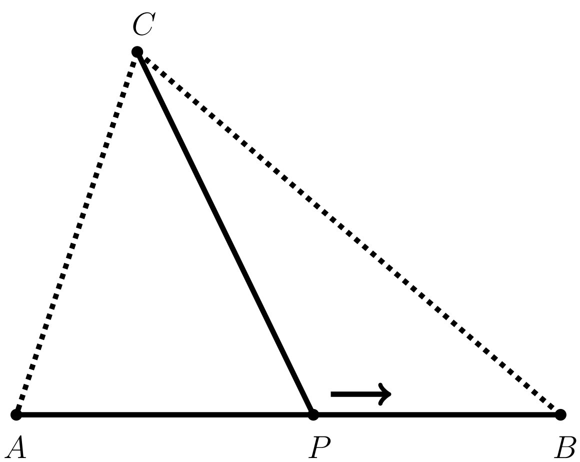

Figura 1: o ponto P se move ao longo do segmento AB, indo de A para B. O segmento CP, de tamanho variável, cobre o triângulo ABC.

Isso significa que um triângulo, visto como uma região do plano, é a parte do plano varrida por um segmento CP, onde o ponto P percorre um segmento de reta AB (Figura 1).

Por vezes, é conveniente chamar de triângulo apenas a união dos segmentos AB, AC e BC, ou seja, a parte da região formada pelo segmento AB e pelos segmentos CP quando P ocupa os extremos A ou B do segmento AB, somente.

[1]Pode ser mostrado que obtemos exatamente os mesmos pontos se fizermos o ponto Q (resp. R) variar ao longo de BC (resp. AC) e tomarmos a união de todos os segmentos AQ (resp. BR).

Vamos, agora, fazer uma construção análoga no espaço. Seja $A_1A_2 \ldots A_n$ um polígono *convexo* contido em um plano α e seja B a região limitada do plano α delimitada por esse polígono, incluíndo o próprio polígono. Consideremos um ponto V não pertencente ao plano α (veja a Figura 2). A união de todos os segmentos VP, com $P \in B$, é um sólido, que chamamos de **pirâmide**. Se P percorre apenas o polígono $A_1A_2 \ldots A_n$, a união dos segmentos VP determina uma *superfície* L, formada pela união dos triângulos VA_iA_{i+1}, com $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, e VA_nA_1.

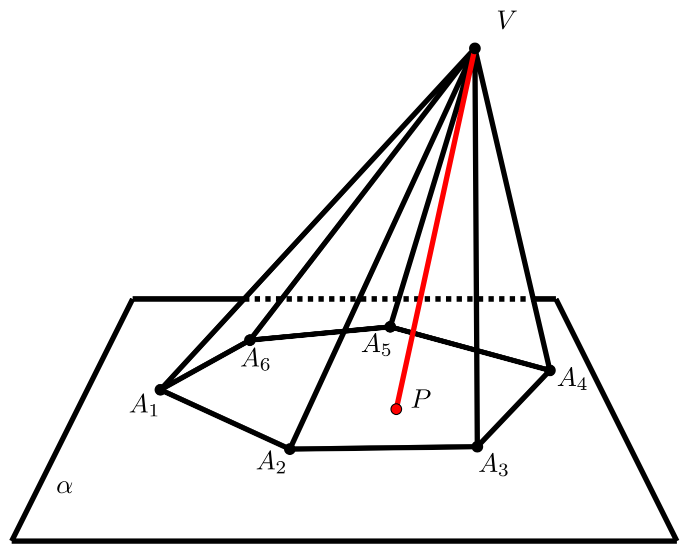

Figura 2: o ponto P se move na região limitada do plano α, delimitada pelo polígono $A_1A_2 \ldots A_n$. O segmento VP, de tamanho variável, preenche a pirâmide $VA_1A_2 \ldots A_n$.

Por vezes, é conveniente chamar de pirâmide apenas a união das superfícies L e B. A superfície L é chamada de **superfície lateral** da pirâmide e B é chamada de **base** da pirâmide. O polígono $A_1A_2 \ldots A_n$ que delimita a base B é chamado de **polígono da base**. O ponto V é dito o **vértice** da pirâmide. Os segmentos VA_i, com $i \in \{1, \ldots, n\}$ são chamados de **arestas laterais** da pirâmide. Finalmente, os segmentos A_iA_{i+1}, para $i\{1, \ldots, n-1\}$, e A_nA_1, são ditos as **arestas da base** da pirâmide.

Devemos notar, ainda, que a superfície lateral de uma pirâmide é formada por triângulos. Cada um desses triângulos é uma **face lateral** da pirâmide.

A distância entre o vértice V e o plano α da base da pirâmide é a **altura** da pirâmide.

A natureza de uma pirâmide é determinada pela natureza de sua base, isto é, dizemos que uma pirâmide é *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, *hexagonal* etc., conforme sua base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, um hexágono etc.

Suponhamos que o polígono da base de uma pirâmide seja regular, com centro O, e que VO seja perpendicular ao plano da base. Neste caso, dizemos que a pirâmide é **regular**.

Os triângulos que formam a superfície lateral de uma pirâmide regular são todos isósceles e congruentes entre si (veja a Figura 3). Para verificar isso, vejamos, primeiramente, que $\overline{OA_i} = \overline{OA_j}$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, porque o polígono da base é regular e O é seu centro. Dessa forma, os triângulos retângulos OVA_i e OVA_j são congruentes, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, pois o cateto OV é comum a todos e o outro cateto tem a mesma medida em cada par de triângulos. Portanto, todas as arestas laterais de uma pirâmide regular são congruentes. Em particular, duas arestas laterais consecutivas são congruentes, o que implica que cada triângulo da superfície lateral da pirâmide é isósceles. Por fim, como as arestas da base têm todas a mesma medida, os triângulos da lateral da pirâmide são todos congruentes.

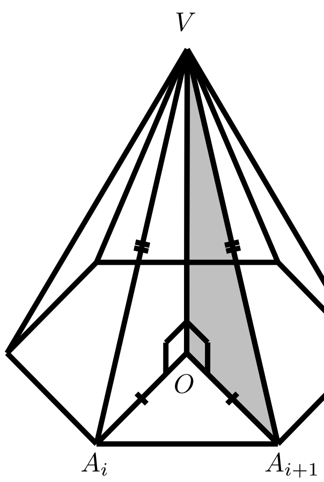

Figura 3: os triângulos da superfície lateral de uma pirâmide regular são todos isósceles congruentes entre si.

Em uma pirâmide regular, a altura de qualquer uma de suas faces laterais é chamada de **apótema** da pirâmide. Na Figura 4, M é ponto o ponto médio de uma das arestas da base da pirâmide. O apótema da pirâmide é $a_p = \overline{VM}$, sua altura é $h = \overline{VO}$, e o apótema da base é $a_b = \overline{OM}$. Como o triângulo VOM é retângulo, o teorema de Pitágoras fornece a relação $\overline{OM}^2 + \overline{VO}^2 = \overline{VM}^2$, ou seja,

$$a_b^2 + h^2 = a_p^2. \tag{1}$$

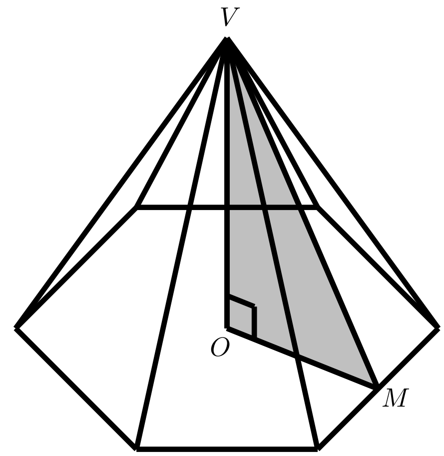

Figura 4: altura, apótema da base e apótema da pirâmide.

O exemplo a seguir exercita os conceitos apresentados até aqui.

Exemplo 1. *O produto da altura de uma pirâmide hexagonal regular pelo comprimento da aresta da sua base é igual a 4. Se a área total dessa pirâmide é $36\,\text{cm}^2$, calcule a diferença entre a área lateral e a área da base dessa pirâmide.*

Solução. Chamemos de A_B e A_L a área da base e a área lateral da pirâmide, respectivamente. Se a_b é o apótema da base dessa pirâmide e ℓ é o comprimento da aresta da base, então

$$A_B = 6 \cdot \frac{a_b \cdot \ell}{2} = 3a_b \cdot \ell,$$

pois a base é um hexágono que pode ser decomposto em seis triângulos de base ℓ e altura a_b. De modo similar, temos

$$A_L = 6 \cdot \frac{a_p \cdot \ell}{2} = 3a_p \cdot \ell,$$

pois a superfície lateral da pirâmide é composta por seis triângulos de base ℓ e altura a_p.

Da relação $a_p^2 = a_b^2 + h^2$, segue que

$$\begin{aligned} A_L^2 &= 9\ell^2 \cdot a_p^2 = 9\ell^2(a_b^2 + h^2) \\ &= 9\ell^2 \cdot a_b^2 + 9\ell^2 \cdot h^2 \\ &= A_B^2 + 9(\ell h)^2. \end{aligned}$$

Como $\ell h = 4$, temos $A_L^2 = A_B^2 + 144$, ou seja, $(A_L - A_B)(A_L + A_B) = 144$. Por fim, de $A_L + A_B = 36\,\text{cm}^2$, obtemos

$$A_L - A_B = \frac{144}{36} = 4\,\text{cm}^2.$$

$\square$

2 O volume da pirâmide via Princípio de Cavalieri

Neste mesmo módulo, na aula sobre volume e o princípio de Cavalieri, calculamos o volume da pirâmide, seguindo o que Euclides expõe no clássico *Os Elementos*.

O passo essencial para o cálculo do volume da pirâmide está na Proposição 5 do livro XII d'*Os Elementos*, onde Euclides demonstra que pirâmides de mesma altura e que têm bases com mesma área têm o mesmo volume (Teorema 8 da aula sobre volumes e o Princípio de Cavalieri).

De posse desse resultado Euclides demonstra, na Proposição 7 do livro XII, que uma pirâmide triangular tem volume igual a um terço do volume do prisma de mesma altura, cuja base tem mesma área. Esse resultado também está demonstrado na aula sobre volume e Princípio de Cavalieri (Corolário 9).

Nesta seção, usaremos o Princípio de Cavalieri para demonstrar que duas pirâmides (não necessariamente triangulares) de mesma altura e cujas bases têm mesma área têm mesmo volume. Para tanto, necessitaremos do resultado constante da observação a seguir, a qual pode ser verificada de modo simples.

Observação 2. *Se $\mathcal{P}$ é um polígono plano, então existe um triângulo cuja área é igual à área de $\mathcal{P}$.*

Agora, seja $VA_1A_2\dots A_n$ uma pirâmide com vértice V, altura h e base poligonal $A_1A_2\dots A_n$ (veja a Figura 5). Considere também uma pirâmide triangular de vértice U e base ABC, tal que o triângulo ABC tem a mesma área que o polígono $A_1A_2\dots A_n$ (isso é possível, pela observação acima). Suponha, ainda, que as duas pirâmides têm a mesma altura.

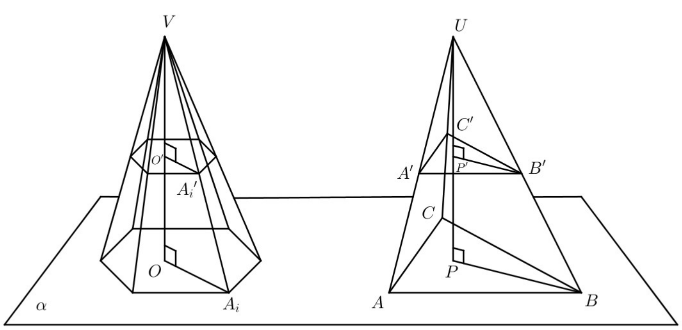

Figura 5: cortes de duas pirâmides por um plano paralelo ao plano α que contém suas bases.

Posicione as duas pirâmides conforme mostrado na Figura 5, isto é, com as duas bases contidas em um mesmo plano α e as duas pirâmides contidas em um mesmo semi-espaço em relação a α. Um plano β paralelo a α (e que não está desenhado na Figura 5), intersecta a pirâmide de base triangular em um triângulo $A'B'C'$ e a outra pirâmide em um polígono $A_1'A_2'\dots A_n'$. A seguir, vamos provar a seguinte afirmação:

> O triângulo $A'B'C'$ e o polígono $A_1'A_2'\dots A_n'$ têm a mesma área.

Sejam O e P, respectivamente, as projeções ortogonais dos vértices V e U sobre o plano α, de modo que VO e UP sejam perpendiculares a α (veja novamente a Figura 5). Sejam O' e P' as interseções de VO e UP com o plano β. Se A_i é um dos vértices do polígono $A_1A_2\dots A_n$, o vértice A_i' correspondente a A_i no polígono $A_1'A_2'\dots A_n'$ é a interseção de VA_i com β.

Como β é paralelo a α, os triângulos retângulos VOA_i e $VO'A_i'$ são semelhantes, com

$$\frac{\overline{VA_i}}{\overline{VA_i'}} = \frac{\overline{VO}}{\overline{VO'}} = k, \tag{2}$$

onde k é a razão de semelhança entre esses dois triângulos. Observe que a proporção (2) independe da escolha de i. Em particular,

$$\frac{\overline{VA_i}}{\overline{VA_i'}} = \frac{\overline{VO}}{\overline{VO'}} = \frac{\overline{VA_{i+1}}}{\overline{VA_{i+1}'}}. \tag{3}$$

Como (veja a Figura 6) os triângulos VA_iA_{i+1} e $VA_i'A_{i+1}'$ compartilham o ângulo $\angle A_iVA_{i+1}$ e os lados adjacentes a esse ângulo comum são proporcionais, temos que esses dois triângulos são semelhantes, com a mesma com razão de semelhança k para todo i.

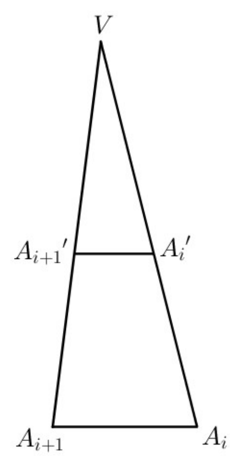

Figura 6: os triângulos VA_iA_{i+1} e $VA_i'A_{i+1}'$ são semelhantes na razão $k = \frac{\overline{VO}}{\overline{VO'}}$.

Isso significa que os dois polígonos $A_1A_2\ldots A_n$ e $A'_1A'_2\ldots A'_n$ têm lados correspondentes proporcionais. Mais ainda, traçando os segmentos OA_i e $O'A'_i$, para $i=1,\ldots,n$, dividimos tais polígonos em triângulos semelhantes, com razão de semelhança k. Com isso, podemos concluir que, se S e S' são as áreas de $A_1A_2\ldots A_n$ e $A'_1A'_2\ldots A'_n$, respectivamente, então $S/S'=k^2$.

Exatamente o mesmo procedimento pode ser repetido na pirâmide $VABC$, fornecendo a relação $R/R'=\ell^2$, onde R e R' são as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$ e ℓ é a razão de semelhança, dada por $\ell=\frac{\overline{UP}}{\overline{UP'}}$.

Como as duas pirâmides têm a mesma altura, temos $\overline{UP}=\overline{VO}=h$. Também, como O' e P' são determinados pelo mesmo plano β, paralelo a α, temos que $\overline{UP'}=\overline{VO'}$. Assim, $\ell=\frac{\overline{UP}}{\overline{UP'}}=\frac{\overline{VO}}{\overline{VO'}}=k$, igualdade que por sua vez implica $R/R'=\ell^2=k^2=S/S'$. Mas, como as áreas R e S das bases das pirâmides são iguais, temos: $R'=S'$.

Podemos, agora, aplicar o Princípio de Cavalieri (veja a aula *Volumes e o Princípio de Cavalieri*, Teorema 10) para concluir que as duas pirâmides têm o mesmo volume.

A partir deste ponto, basta repetir o que já está feito na aula sobre volumes já citada, particularmente o Corolário 9, onde é provado que o volume de uma pirâmide é um terço do volume do prisma de mesma base e altura. Veja, em particular, a Figura 7 daquela aula, onde está ilustrada uma maneira de se dividir um prisma em três pirâmides de mesmo volume. Vamos repetir aqui apenas a expressão do volume de uma pirâmide: se a área de sua base é S e sua altura é h, então seu volume é

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h. \tag{4}$$

Particularizando nossa discussão um pouco mais, chamamos uma pirâmide triangular de **tetraedro**. Mais particularmente ainda, se todas as faces de um tetraedro forem congruentes, então o chamamos de **tetraedro regular** (veja a Figura 7). Observe que esse é um conceito mais restritivo do que o de *pirâmide triangular regular*, que é uma pirâmide tendo por base um triângulo equilátero e tal que a projeção do vértice da pirâmide sobre o plano da base coincide com o centro. Entretanto, ambos os termos são consagrados pelo uso. A superfície do tetraedro regular é formada por quatro triângulos equiláteros congruentes.

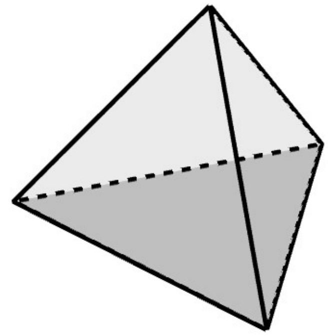

Figura 7: um tetraedro regular.

Terminamos esta aula com um exemplo que usa o conceito de volume para estabelecer uma propriedade curiosa dos tetraedros regulares.

Exemplo 3. *Seja P um ponto pertencente ao interior do tetraedro regular $ABCD$, ou seja, um ponto pertencente à região limitada do espaço, delimitada pela superfície do tetraedro.*

(a) Mostre que a soma das distâncias de P às faces do tetraedro é uma constante.

(b) Use o item anterior para encontrar o raio da esfera inscrita no tetraedro regular.

Solução. Sejam P_1,P_2,P_3 e P_4 as projeções ortogonais do ponto P sobre as quatro faces do tetraedro, como ilustrado na Figura 8.

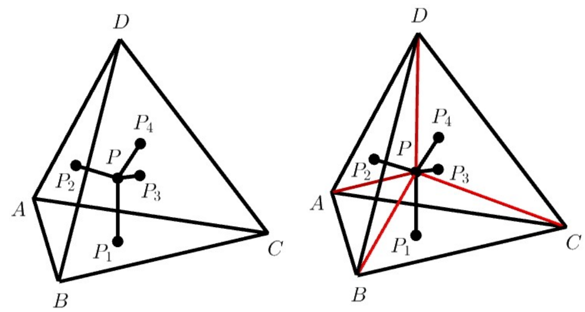

Figura 8: à esquerda, um ponto P no interior do tetraedro $ABCD$, juntamente com as projeções ortogonais desse ponto sobre as faces. À direita, os segmentos em vermelho particionam o tetraedro em quatro pirâmides triangulares de vértice P.

A pirâmide $ABCD$ pode ser dividida nas quatro pirâmides triangulares menores $PABC$, $PABD$, $PBCD$ e $PACD$, todas com vértices em P e bases congruentes (Figura 8, à direita). A soma dos volumes dessas pirâmides é igual ao volume do tetraedro. De acordo com a expressão (4), se S é a área das faces do tetraedro e h é sua, então

$$\frac{1}{3}\cdot Sh=\frac{1}{3}\cdot Sd_1+\frac{1}{3}\cdot Sd_2+\frac{1}{3}\cdot Sd_3+\frac{1}{3}\cdot Sd_4,$$

onde $d_1=\overline{PP_1}$, $d_2=\overline{PP_2}$, $d_3=\overline{PP_3}$ e $d_4=\overline{PP_4}$ são as distâncias de P até cada uma das faces. Simplificando a igualdade acima, obtemos:

$$h=d_1+d_2+d_3+d_4. \tag{5}$$

Com isso, provamos que a soma das distâncias do ponto P às quatro faces do tetraedro regular $ABCD$ é constante e igual à altura do tetraedro, o que resolve o item (a).

Para o item (b), consideremos o caso particular em que o ponto P é o centro da esfera inscrita no tetraedro regular. Então, a distância de P às quatro faces do tetraedro é a mesma e é igual ao raio da esfera inscrita: $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = r$. Logo, neste caso o item (a) fornece a igualdade $4r = h$, da qual obtemos

$$r = \frac{h}{4}.$$

Em palavras, o raio da esfera inscrita em um tetraedro regular tem medida igual a 1/4 da altura do tetraedro. □

Dicas para o Professor

A presente aula pode ser coberta em três ou quatro encontros de 50 minutos.

A Seção 2 complementa a Seção 1 da aula *Volumes e Princípio de Cavalieri*. O resultado aqui demonstrado com o auxílio do princípio de Cavalieri, de que priâmides de mesma altura e com bases de mesma área têm o mesmo volume, foi lá obtido usando-se o princípio da exaustão.

O princípio da exaustão é o método utilizado por Euclides, no seu clássico livro *Elementos* para encontrar o volume da pirâmide. A comparação entre os dois métodos pode ser de grande valia se você estiver trabalhando com turmas mais avançadas.

O resultado provado nesta aula, de que a soma das distâncias de um ponto interior às quatro faces de um tetraedro regular é constante, tem um análogo em dimensão dois: se P é um ponto no interior de um triângulo equilátero, então a soma das distâncias de P aos três lados do triângulo é sempre igual à altura do triângulo. Você pode estabelecer uma conexão entre esse resultado e as *coordenadas baricêntricas*, estudadas na aula *Coordenadas, Distâncias e Razões de Segmentos no Plano Cartesiano*, parte 2, no Módulo 1 de Geometria Analítica? É possível estender coordenadas baricêntricas para pontos do espaço?

As referências elencadas a seguir trazem mais resultados e exercícios interessantes sobre pirâmides, de variados graus de dificuldade.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha, *Geometria*, Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.
2. O. Dolce, J.N. Pompeo, *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 10, quarta edição, São Paulo, Ed. Atual, 1985.