Material Teórico - Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Semelhança entre triângulos - Parte II

Nono ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

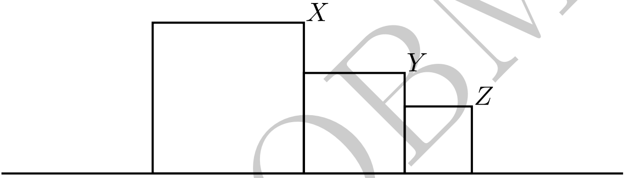
04 de Junho de 2026

Portal da Matemática
OBMEP

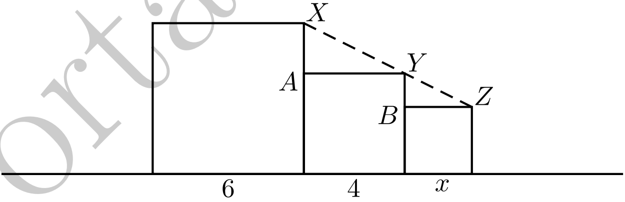
Esta segunda parte do material traz vários exemplos interessantes, retirados das referências [1] e [2], de aplicações dos casos de semelhança de triângulos estudados na primeira parte. No que segue, sempre que tivermos triângulos semelhantes XYZ e $X'Y'Z'$, com correspondência de vértices $X \leftrightarrow X'$, $Y \leftrightarrow Y'$ e $Z \leftrightarrow Z'$, escreveremos

$$XYZ \sim X'Y'Z'.$$

Exemplo 1. *Na figura a seguir, os três quadriláteros mostrados são quadrados e os pontos X, Y e Z são colineares. Calcule, em centímetros, a medida do lado do quadrado menor, sabendo que os outros dois quadrados têm lados medindo 4 cm e 6 cm.*



Solução. A figura a seguir destaca dois pontos de interesse e comprimentos relevantes da figura anterior.



Como $X\widehat{A}Y = Y\widehat{B}Z = 90^\circ$ e $X\widehat{Y}A = Y\widehat{Z}B$ (pois $\overleftrightarrow{AY} \parallel \overleftrightarrow{BZ}$), temos que $XAY \sim YBZ$. Então,

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{BZ}}.$$

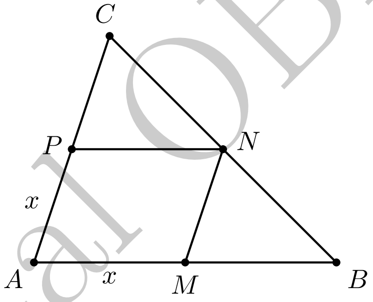
Agora, $\overline{AX} = 6 - 4 = 2$, $\overline{BY} = 4 - x$, $\overline{AY} = 4$ e $\overline{BZ} = x$, de modo que

$$\frac{2}{4-x} = \frac{4}{x}.$$

Multiplicando em $\times$, ficamos com $2x = 4(4-x)$, logo, $6x = 16$ e, daí, $x = \frac{8}{3}$. $\square$

Exemplo 2. *ABC é um triângulo tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Os pontos M, N e P estão situados sobre os lados AB, BC e AC, respectivamente, de tal modo que $AMNP$ seja um losango. Calcule, em termos de a, b e c, o comprimento do lado do losango.*

Solução. A figura a seguir ilustra a situação descrita no enunciado. Nela, x denota o comprimento dos lados do losango $AMNP$.



Como todo losango é um paralelogramo (logo, tem lados opostos paralelos), temos $\overleftrightarrow{PN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, logo, $P\widehat{N}C = A\widehat{B}C$. Então $CPN \sim CAB$ e, daí,

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{AB}}.$$

Substituindo $\overline{CP} = \overline{AC} - \overline{AP} = b - x$, $\overline{CA} = b$, $\overline{PN} = x$ e $\overline{AB} = c$, obtemos

$$\frac{b-x}{b} = \frac{x}{c}.$$

Portanto, as propriedades de proporções dão

$$\frac{b-x}{b} = \frac{x}{c} = \frac{(b-x)+x}{b+c} = \frac{b}{b+c},$$

de modo que

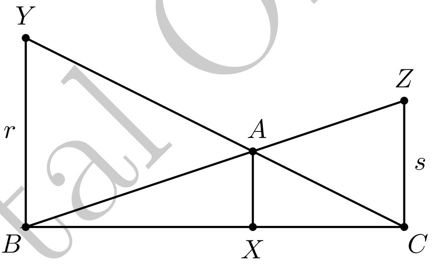
$$x = \frac{bc}{b+c}.$$

$\square$

Exemplo 3. *Sobre o lado BC de um triângulo ABC marcamos um ponto X. Em seguida, traçamos por B e C as retas r e s, respectivamente, ambas paralelas a $\overleftrightarrow{AX}$. Se $\overleftrightarrow{AC} \cap r = \{Y\}$ e $\overleftrightarrow{AB} \cap s = \{Z\}$, prove que*

$$\frac{1}{\overline{BY}} + \frac{1}{\overline{CZ}} = \frac{1}{\overline{AX}}.$$

Solução. A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.



Como $r \parallel \overleftrightarrow{AX}$, temos $BYC \sim XAC$; como $s \parallel \overleftrightarrow{AX}$, temos $CZB \sim XAB$. Escrevendo as semelhanças, segue que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{BC}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AX}}{\overline{CZ}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}}.$$

Somando membro a membro as igualdades acima, obtemos

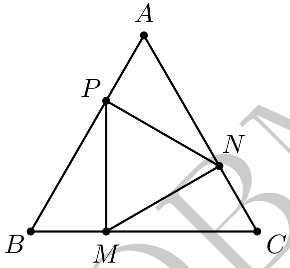
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BY}} + \frac{\overline{AX}}{\overline{CZ}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CX} + \overline{BX}}{\overline{BC}} = 1.$$

Por fim, multiplicando ambos os membros da igualdade

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BY}} + \frac{\overline{AX}}{\overline{CZ}} = 1$$

por $\dfrac{1}{\overline{AX}}$, obtemos a igualdade do enunciado. $\square$

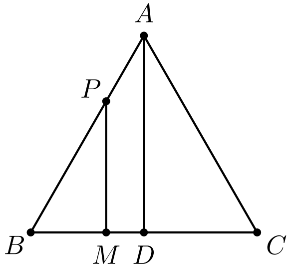
Exemplo 4. *Na figura, ABC é um triângulo equilátero de lado a e M, N e P são tais que $\overline{BM} = \overline{CN} = \overline{AP} = \frac{a}{3}$.*



Mostre que o triângulo MNP também é equilátero e que seus lados são perpendiculares aos lados de ABC.

Prova. Como $\overline{BM} = \overline{CN} = \overline{AP} = \frac{a}{3}$, temos $\overline{BP} = \overline{CM} = \overline{AN} = \frac{2a}{3}$; como $P\widehat{B}M = M\widehat{C}N = N\widehat{A}P = 60°$, os triângulos BMP, CNM e APN são congruentes por LAL. Então, $\overline{PM} = \overline{MN} = \overline{NP}$, isto é, MNP é equilátero.

Agora, seja D o ponto médio do lado BC.



Como $P\widehat{B}M = A\widehat{B}D$ e

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BA}} = \frac{2a/3}{a} = \frac{2}{3} = \frac{a/3}{a/2} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BD}},$$

temos $BMP \sim BDA$ por LAL. Portanto,

$$P\widehat{M}B = A\widehat{D}B = 90°.$$

Da mesma forma, $MN \perp AC$ e $NP \perp AB$. Alternativamente,

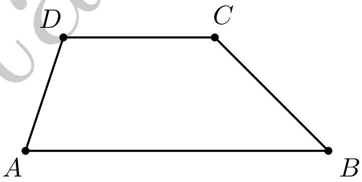
$$\begin{aligned} B\widehat{P}M &= 180° - P\widehat{B}M - P\widehat{M}B \\ &= 180° - 60° - 90° \\ &= 30° \end{aligned}$$

implica

$$\begin{aligned} A\widehat{P}N &= 180° - M\widehat{P}N - B\widehat{P}M \\ &= 180° - 60° - 30° \\ &= 90° \end{aligned}$$

e, analogamente, $C\widehat{N}M = 90°$. □

Exemplo 5. *Na figura a seguir, $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$.*



*Pelo ponto P de interseção das diagonais de $ABCD$ traçamos o segmento MN paralelo às bases, com $M \in AD$ e $N \in BC$. Prove que P é o ponto médio de MN e que $\overline{MN}$ é igual à **média harmônica** de a e b, isto é, prove que*

$$\overline{MN} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Prova. A figura a seguir ilustra a situação descrita. Observe que o paralelismo entre $\overleftrightarrow{MN}$ e as bases garante que

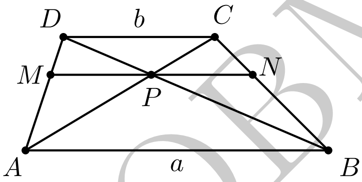
$$D\widehat{M}P = D\widehat{A}B, \quad M\widehat{P}A = D\widehat{C}A,$$

$$C\widehat{N}P = C\widehat{B}A, \quad N\widehat{P}B = C\widehat{D}B.$$

Por sua vez, tais igualdades fornecem imediatamente as semelhanças de triângulos

$$MPD \sim ABD, \quad MPA \sim DCA,$$

$$PNC \sim ABC, \quad PNB \sim DCB.$$



Seja $\overline{MP} = x$. Então,

$$MPD \sim ABD \Rightarrow \frac{\overline{MP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{\overline{MD}}{\overline{AD}};$$

$$MPA \sim DCA \Rightarrow \frac{\overline{MP}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{DA}} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AD}}.$$

Somando membro a membro as duas relações acima, segue que

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{\overline{MD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{MA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{MA} + \overline{MD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AD}} = 1.$$

Mas

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{(a+b)x}{ab} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{ab}{a+b}.$$

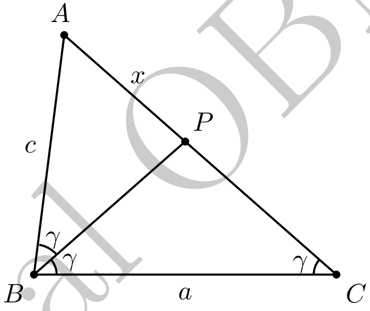
Analogamente, sendo $y = \overline{NP}$, argumentando como acima com respeito às semelhanças $PNC \sim ABC$ e $PNB \sim DCB$, obtemos $y = \frac{ab}{a+b}$, logo,

$$\overline{MN} = x + y = \frac{2ab}{a+b}.$$

□

Exemplo 6 (Olimpíada Cearense). *Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Se $A\widehat{B}C = 2A\widehat{C}B$, mostre que $b^2 = c(a+c)$.*

Prova. Sejam $\widehat{C} = \gamma$ e BP a bissetriz interna relativa a $\angle B$. Como $A\widehat{B}C = 2\gamma$, temos $P\widehat{B}C = \gamma$ (acompanhe na figura a seguir).



Então, o teorema do ângulo externo dá

$$A\widehat{P}B = P\widehat{B}C + P\widehat{C}B = 2\gamma,$$

de sorte que $APB \sim ABC$. Assim,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

ou, o que é o mesmo,

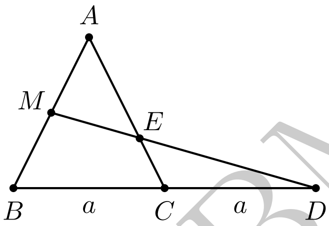
$$\frac{x}{c} = \frac{c}{b}.$$

Agora, pelo teorema da bissetriz, temos $x = \frac{bc}{a+c}$. Portanto,

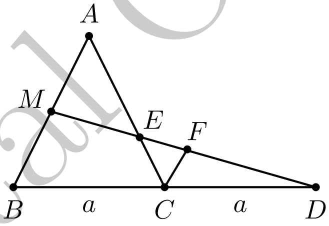
$$\frac{x}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{b}{a+c} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = c(a+c).$$

$\square$

Exemplo 7. *Na figura a seguir, ABC um triângulo equilátero de lado a, M é o ponto médio de AB e D é tal que $\overline{CD} = a$. Calcule $\overline{AE}$ em função de a.*



Prova. Trace, por C, a paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ e marque seu ponto F de interseção com DE (acompanhe na próxima figura).



Como $M\widehat{B}D = F\widehat{C}D$ e $\angle D$ é comum, temos $MBD \sim FCD$. Uma vez que $A\widehat{E}M = C\widehat{E}F$ e $A\widehat{M}E = C\widehat{F}E$, temos $AEM \sim CEF$.

Tendo em vista que queremos calcular $\overline{AE}$ em função de A, pomos $\overline{AE} = x$ e $\overline{CF} = y$. Então, $\overline{CE} = a - x$ e

$$AME \sim CFE \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CF}}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{a-x} = \frac{a/2}{y}.$$

Também,

$$\begin{aligned} MBD \sim FCD &\Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \\ &\Rightarrow \frac{a/2}{y} = \frac{2a}{a} = 2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{x}{a-x} = \frac{a/2}{y} = 2 &\Rightarrow x = 2(a-x) \\ &\Rightarrow x = \frac{2a}{3}. \end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Ao aplicar o conceito de semelhança de triângulos a uma certa situação, o mais complicado, em geral, é *enxergar a semelhança*. Isso pode ser óbvio em determinadas situações (como nos exemplos 1 a 3), um pouco menos óbvio em outras (como nos exemplos 4 e 5), ou bem mais difícil (como nos exemplos 6 e 7).

A chave para exercitar essa “visão além do alcance” é resolver diversos problemas, de graus de dificuldade variados. Nesse sentido, recomendamos ao leitor debruçar-se sobre os problemas propostos nas referências [1] e [2], com especial ênfase a [2] para problemas mais simples e a [1] para problemas mais complexos.

Um outro aspecto das coisas é que todos os exemplos aqui discutidos utilizaram semelhanças detectadas pelo caso AA. Isso ocorre porque o caso AA gera semelhanças mais simples de serem percebidas que os demais casos; em tais situações, é fácil notar igualdades de certos ângulos e, por outro lado, queremos calcular comprimentos de certos segmentos. Há, contudo, diversas situações interessantes que requerem o emprego dos demais casos de semelhança; nelas, em geral temos alguma informação sobre ângulos e comprimentos, mas queremos calcular algum ângulo que será revelado a partir de uma semelhança. Para alguns exemplos, veja os problemas propostos na referência [2].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, 3ª edição. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2024.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2013.