# Material Teórico - Módulo Funções Trigonométricas

## Seno, Cosseno e Tangente
## Parte 5

**Primeiro Ano do Ensino Médio**

**Autor: Ulisses Lima Parente**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**20 de outubro de 2024**



Portal da Matemática
OBMEP

Neste material, vamos deduzir fórmulas que transformam em produtos certas expressões construídas a partir de somas e diferenças de senos, cossenos e tangentes. Para deduzir tais fórmulas, partimos das identidades trigonométricas abaixo.

- Cosseno da soma:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \tag{1}$$

- Cosseno da diferença:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \tag{2}$$

- Seno da soma:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a. \tag{3}$$

- Seno da diferença:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a. \tag{4}$$

Somando membro a membro (1) e (2), obtemos

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + \cos(a-b) &= \cos a \cos b - \cancel{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \\ &\quad + \cos a \cos b + \cancel{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \\ &= 2\cos a \cos b,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b. \tag{5}$$

Subtraindo as mesmas identidades (1) e (2), obtemos

$$\begin{aligned}\cos(a+b) - \cos(a-b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ &\quad - (\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) \\ &= \cancel{\cos a \cos b} - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ &\quad - \cancel{\cos a \cos b} - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ &= -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \tag{6}$$

Analogamente, podemos somar membro a membro as identidades (3) e (4) para obter

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cancel{\operatorname{sen} b \cos a} \\ &\quad + \operatorname{sen} a \cos b - \cancel{\operatorname{sen} b \cos a} \\ &= 2\operatorname{sen} a \cos b; \end{aligned}$$

isto é,

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} a \cos b. \tag{7}$$

Finalmente, subtraindo as identidades (3) e (4), obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \\ &\quad - (\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a) \\ &= \cancel{\operatorname{sen} a \cos b} + \operatorname{sen} b \cos a \\ &\quad - \cancel{\operatorname{sen} a \cos b} + \operatorname{sen} b \cos a \\ &= 2\operatorname{sen} b \cos a; \end{aligned}$$

assim,

$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} b \cos a. \tag{8}$$

As identidades (5), (6), (7) e (8) são sonhecidas como **fórmulas de Werner**.

Agora, vamos fazer $a+b=p$ e $a-b=q$ nas fórmulas de Werner. Se somarmos essas duas igualdades, obtemos $2a = p+q$, ou seja, $a = \frac{p+q}{2}$, ao passo que, se subtrairmos a segunda da primeira, obtemos $2b = p-q$, o que implica $b = \frac{p-q}{2}$.

Substituindo esses valores para $a$ e $b$ nas fórmulas de Werner, chegamos às seguintes **fórmulas de transformação em produto**:

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right); \tag{9}$$

$$\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right); \tag{10}$$

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right); \tag{11}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right). \tag{12}$$

Veja ainda que, se $\cos p$ e $\cos q$ forem ambos não nulos, então

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q &= \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} + \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} \\
&= \frac{\operatorname{sen} p \cos q + \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cos q} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cos q}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q &= \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} - \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} \\
&= \frac{\operatorname{sen} p \cos q - \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cos q} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cos q}.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos as fórmulas adicionais

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cos q} \tag{13}$$

e

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cos q} \tag{14}$$

Apesar de serem várias fórmulas veja que as deduções que nos levaram a (9), (10), (11), (12), (13) e (14) são bastante simples, o que facilita sua reobtenção, em caso de esquecimento.

Por outro lado, no que segue veremos alguns exemplos que ilustram o fato de que vale a pena dispor dessas fórmulas adicionais, uma vez que as mesmas facilitam sobremaneira a resolução de certos problemas.

**Exemplo 1.** *Calculando o valor de*

$$\frac{\operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ}$$

*obtemos:*

$(a)$ $\sqrt{2}$.

$(b)$ $\sqrt{2}+1$.

$(c)$ $\sqrt{3}$.

$(d)$ $\sqrt{2}+1$.

**Solução.** Utilizando a fórmula (11), obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{80^\circ + 20^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{80^\circ - 20^\circ}{2}\right)\\ &= 2\operatorname{sen} 50^\circ \cos 30^\circ\\ &= 2\operatorname{sen} 50^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \sqrt{3}\cdot \operatorname{sen} 50^\circ.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cdot\operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \sqrt{3}.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra (c). □

**Exemplo 2** (Fatec - SP). *Da Trigonometria, sabe-se que, quaisquer que sejam os números reais* $p$ *e* $q$*, tem-se*

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

*Logo, a expressão* $\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(9x)$ *é idêntica a:*

$(a)$ $\operatorname{sen}(10x)+\operatorname{sen}(8x)$.

$(b)$ $2\cdot(\operatorname{sen}(6x)+\operatorname{sen}(2x))$.

$(c)$ $2\cdot(\operatorname{sen}(10x)+\operatorname{sen}(8x))$.

(*d*) $\frac{1}{2} \cdot (\operatorname{sen}(6x) + \operatorname{sen}(2x))$.

(*e*) $\frac{1}{2} \cdot (\operatorname{sen}(10x) + \operatorname{sen}(8x))$.

**Solução.** Vamos escrever $\frac{p+q}{2} = 9x$ e $\frac{p-q}{2} = x$ na tentativa de utilizar a fórmula fornecida no enunciado. Assim, somando as duas equações membro a membro, obtemos $p = 10x$; por outro lado, subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos $q = 8x$. Portanto, utilizando a fórmula do enunciado com esses valores para $p$ e $q$, concluímos que

$$2\operatorname{sen}(9x)\cos(x) = \operatorname{sen}(10x) + \operatorname{sen}(8x),$$

o que implica

$$\operatorname{sen}(9x)\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{sen}(10x) + \operatorname{sen}(8x)).$$

Desse modo, a alternativa correta é a da letra (e). □

**Exemplo 3** (FUVEST). *Sejam $x$ e $y$ números reais positivos tais que $x + y = \frac{\pi}{2}$. Sabendo-se que $\operatorname{sen}(x - y) = \frac{1}{3}$, o valor de $\operatorname{tg}^2 y - \operatorname{tg}^2 x$ é:*

(*a*) $\frac{3}{2}$.

(*b*) $\frac{5}{4}$.

(*c*) $\frac{1}{2}$.

(*d*) $\frac{1}{4}$.

(*e*) $\frac{1}{8}$.

**Solução.** De $x + y = \frac{\pi}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} x = \frac{\pi}{2} - y \Longrightarrow \cos x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \\ \Longrightarrow \cos x &= \cos\frac{\pi}{2}\cos y + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} y \\ \Longrightarrow \cos x &= 0 \cdot \cos y + 1 \cdot \operatorname{sen} y \\ \Longrightarrow \cos x &= \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Usando a simetria de $x + y = \frac{\pi}{2}$, podemos mudar as posições de $x$ e $y$ nos cálculos acima para obter $\cos y = \operatorname{sen} x$. Além disso, uma vez que $\operatorname{sen}(x - y) = \frac{1}{3}$, aplicando a fórmula (4), obtemos

$$\operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x = \frac{1}{3}.$$

Substituindo $\cos y = \operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen} y = \cos x$ na última equação acima, chegamos a

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{3}.$$

Somando essa igualdade membro a membro com a relação fundamental da Trigonometria,

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

concluímos que $2 \operatorname{sen}^2 x = \frac{4}{3}$, logo,

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{2}{3}.$$

Substituamos $\operatorname{sen}^2 x = \frac{2}{3}$ na segunda equação:

$$\frac{2}{3} + \cos^2 x = 1 \Longrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3}.$$

Finalmente, notando que $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$ e utilizando as fórmulas (13) e (14), chagamos a

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2 y - \operatorname{tg}^2 x &= (\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x) \\
&= \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos x \cos y} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos x \cos y} \\
&= \frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\cos x \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra (a). □

**Exemplo 4** (ITA). *Os números reais $\alpha$ e $\beta$, com $\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}$ e $0\le\alpha\le\beta$, são tais que a soma $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y$ tem o maior valor possível quando $x=\alpha$ e $y=\beta$. Então, $\alpha$ é igual a:*

$(a)$ $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

$(b)$ $\frac{2\pi}{3}$.

$(c)$ $\frac{3\pi}{5}$.

$(d)$ $\frac{5\pi}{8}$.

$(e)$ $\frac{7\pi}{12}$.

**Solução.** Utilizando a fórmula de transformação em produto (11), obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= 2\operatorname{sen}\frac{\frac{4\pi}{3}}{2}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= 2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= \sqrt{3}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Como

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\le 1$$

e é dito que $\sqrt{3}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ tem o maior valor possível, concluímos que

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=1.$$

Mas

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=1 \iff \frac{\alpha-\beta}{2}=2k\pi \iff \alpha-\beta=4k\pi,$$

para algum $k$ inteiro. Somando membro a membro esta última equação com $\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}$, obtemos $2\alpha=\frac{4\pi}{3}+4k\pi$, logo,

$$\alpha=\frac{2\pi}{3}+2k\pi.$$

Daí, segue que

$$\beta=\frac{4\pi}{3}-\alpha=\frac{4\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}-2k\pi,$$

ou seja,

$$\beta=\frac{2\pi}{3}-2k\pi.$$

Por outro lado, a condição $0\leq\alpha\leq\beta$ nos leva a

$$0\leq\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leq\frac{2\pi}{3}-2k\pi;$$

multiplicando as desigualdades acima por $\frac{1}{2\pi}$, obtemos as desigualdades equivalentes

$$0\leq\frac{1}{3}+k\leq\frac{1}{3}-k$$

ou, o que é o mesmo,

$$-\frac{1}{3}\leq k\leq 0.$$

Uma vez que $k$ é inteiro, concluímos que $k=0$ e, daí,

$$\alpha=\frac{4\pi}{3}+4k\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra (b). $\square$

## Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. É fundamental que os alunos se habituem a utilizar as fórmulas apresentadas neste material, pois a familiaridade com essas fórmulas será importante para resolver diversos problemas que envolvem identidades trigonométricas. Para atingir esse objetivo, sugerimos que sejam apresentados outros exemplos, até que os alunos sejam capazes de utilizar tais fórmulas com desenvoltura.

## Sugestões de Leitura Complementar


1 G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*, nona edição. São Paulo, Atual Editora, 2013.

2. M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner *Trigonometria e Números Complexos.* SBM, 2005.