

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Funções - Parte 1

Funções e Imagem - Parte 2

Tópicos Adicionais

**Autores: Profs. Angelo Papa Neto e
Tiago Caúla Ribeiro**

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

08 de Julho de 2026



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Nesta segunda parte da aula apresentamos alguns exemplos mais elaborados, referentes ao material discutido na primeira parte.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Dentre todas as retas de equação $x - y + c = 0$, com $c \in \mathbb{R}$, encontre aquela(s) tangente(s) ao círculo $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$.*

Solução. Escrevendo $y = x + c$ e substituindo esta expressão na equação do círculo, obtemos uma equação envolvendo apenas a incógnita x :

$$(x - 2)^2 + (x + c - 3)^2 = 1.$$

Desenvolvendo o primeiro membro, obtemos a equação quadrática

$$2x^2 + 2(c - 5)x + (c - 3)^2 + 3 = 0. \quad (1)$$

Evidentemente, essa equação depende do parâmetro c . Cada escolha de c corresponde a uma das retas do feixe de retas paralelas com equações $x - y + c = 0$ (três dessas retas encontram-se esboçadas na Figura 1). Queremos descobrir os possíveis valores de c para os quais a reta correspondente seja *tangente* ao círculo dado.

A caracterização de reta tangente a um círculo que nos interessa é a seguinte: na equação (1),

- (1) se $\Delta < 0$, a equação não tem soluções reais, logo, a reta $x - y + c = 0$ não tem pontos em comum com o círculo (um exemplo típico é a reta ℓ da Figura 1);
- (2) se $\Delta = 0$, a equação tem uma única solução real (com multiplicidade 2), logo, a reta $x - y + c = 0$ e o círculo têm exatamente um ponto em comum, ou seja, a reta é **tangente** ao círculo (uma de tais retas é a reta t da Figura 1);

- (3) se $\Delta > 0$, a equação tem duas soluções reais, logo, a reta $x - y + c = 0$ e o círculo têm dois pontos em comum e a reta é secante ao círculo (uma de tais retas é a reta m da Figura 1).

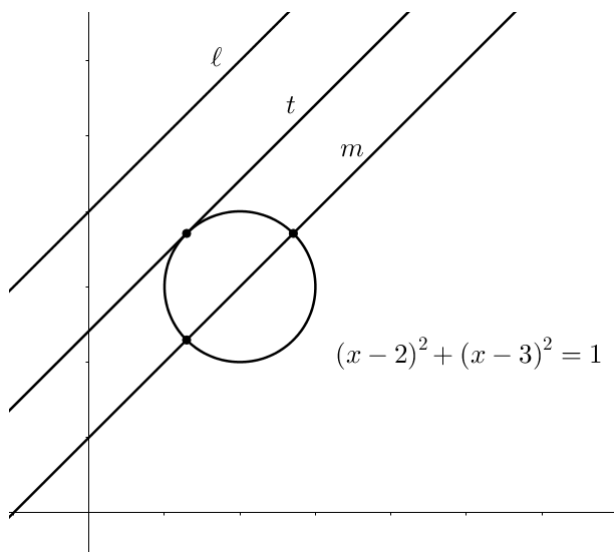


Figura 1: a reta t é tangente ao círculo.

Assim, a fórmula de Báskara para a solução de equações de segundo grau garante que a condição para que a reta seja tangente ao círculo é que o discriminante

$$\Delta = 4(c - 5)^2 - 8((c - 3)^2 + 3)$$

da equação (1) seja igual a zero. Temos, então, a equação

$$4(c - 5)^2 - 8((c - 3)^2 + 3) = 0,$$

que, simplificada, é equivalente a

$$c^2 - 2c - 1 = 0.$$

Logo, $c = 1 - \sqrt{2}$ ou $c = 1 + \sqrt{2}$ são os valores de c que resolvem o problema. Voltando à equação $x - y + c = 0$, concluímos que as retas dessa forma e tangentes ao círculo são $x - y + 1 - \sqrt{2} = 0$ e $x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$. $\square$

Exemplo 2 (AHMSE¹). *Encontre os valores reais de k para os quais a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) = \frac{4x^2 + kx + k}{x + 1},$$

tenha como imagem a reta menos um intervalo da forma $(-L, L)$.

Solução. Um número real y pertence à imagem de f se, e só se, a equação $f(x) = y$ admite alguma solução, ou seja, y pertence à imagem de f se, e somente se, a equação quadrática $4x^2 + (k - y)x + (k - y) = 0$ admite solução real (necessariamente distinta de -1). Se Δ_y for o discriminante dessa equação, temos

$$\Delta_y = (k - y)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (k - y) = (k - y)[(k - y) - 16].$$

Assim, y não pertence à imagem de f se, e só se, $\Delta_y < 0$, sendo tal condição equivalente a $0 < k - y < 16$, a qual, por sua vez, significa que $y \in (k - 16, k)$.

Para que $(k - 16, k)$ seja um intervalo simétrico em relação à origem, devemos ter $k - 16 = -k$, logo, $k = 8$. $\square$

Exemplo 3. *Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.*

Solução. Inicialmente, escrevemos, para $x \neq -1$,

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{2x+2-2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}.$$

¹A AHSME (American High School Mathematics Examination) foi uma prestigiada competição de matemática, nos EUA, para estudantes do Ensino Médio. Criado em 1950, o exame evoluiu e hoje é conhecido como AMC 12 (American Mathematics Competitions). Ele serve como o primeiro passo no processo de seleção para a equipe americana na Olimpíada Internacional de Matemática.

A partir daí, a fim de esboçar o gráfico de f , podemos raciocinar da seguinte forma:

- (1) Primeiro, traçamos o gráfico de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- (2) Em seguida, trasladamos o gráfico anterior uma unidade para a esquerda, obtendo o gráfico de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$.
- (3) Continuando, alongamos o gráfico anterior na direção vertical, pelo fator 2, obtendo o gráfico de $x \mapsto \frac{2}{x+1}$.
- (4) Refletimos o resultado no eixo horizontal, obtendo $x \mapsto -\frac{2}{x+1}$.
- (5) Por fim, trasladamos o gráfico refletido duas unidades para cima, obtendo o gráfico de $x \mapsto 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$.

O resultado final é a figura abaixo:

□

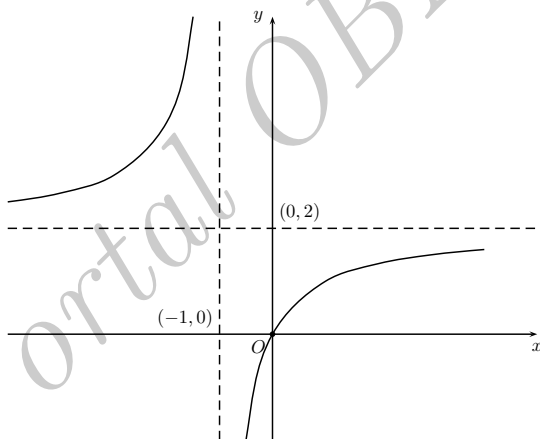


Figura 2: gráfico de $x \mapsto 2x/(x+1)$.

Exemplo 4 (Putnam - 1946). *Suponha que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ satisfaça a condição*

$$|x| \leq 1 \Rightarrow |f(x)| \leq 1.$$

Considerando a função afim $g(x) = 2ax + b$, prove que

$$|x| \leq 1 \Rightarrow |g(x)| \leq 4.$$

Solução. O leitor pode verificar que

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

para quaisquer reais distintos x e y .

Se tomamos $x = 1$, $y = 0$ nessa relação, a hipótese e a desigualdade triangular permitem escrever

$$\begin{aligned} |a + b| &= \left| g\left(\frac{1}{2}\right) \right| = |f(1) - f(0)| \\ &\leq |f(1)| + |f(0)| \leq 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Um cálculo completamente similar, considerando $x = 0$, $y = -1$, fornece $|a - b| = |g(-\frac{1}{2})| \leq 2$.

Portanto, pelas estimativas acima e por uma outra aplicação da desigualdade triangular, obtemos

$$2|a| \leq |a + b| + |a - b| \leq 2 + 2 = 4,$$

de modo que $|a| \leq 2$.

Para encerrar, observamos que a igualdade $[-1, 1] = [-1, 0] \cup [0, 1]$ assegura que, para todo $x \in [-1, 1]$ e algum $x_0 \in \{-1/2, 1/2\}$, temos $|x - x_0| \leq \frac{1}{2}$.

Se $x = x_0$, os cálculos que fizemos anteriormente garantem que $|g(x_0)| \leq 2$. Se $x \neq x_0$, então

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \\ &= \left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| \cdot |x - x_0| + |g(x_0)| \\ &\leq 2|a| \cdot \frac{1}{2} + |g(x_0)| \leq 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

□

O próximo problema é mais elaborado.

Exemplo 5 (IMO - 2022). *Determine todas as funções $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ tais que, para cada $x > 0$, existe um único $y > 0$ satisfazendo*

$$xf(y) + yf(x) \leq 2. \quad (2)$$

Solução. A única função satisfazendo as condições do enunciado é a função recíproca $r : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, tal que $r(x) = 1/x$ para todo $x > 0$.

A função r é uma solução, pois, fixado $x > 0$, $y = x$ é o único número real positivo tal que $xr(y) + yr(x) \leq 2$. Realmente, $xr(y) + yr(x) = 2$ se $x = y$; por outro lado, se $0 < y \neq x$, então $\frac{x}{y} \neq \frac{y}{x}$ e a desigualdade entre as médias dá

$$xr(y) + yr(x) = 2 \cdot \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{2} > 2 \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2.$$

Para encerrar, precisamos mostrar que qualquer função f satisfazendo as condições do enunciado coincide com r .

O fato de que para cada $x > 0$ existe um único $y > 0$ satisfazendo (2) permite definir uma função $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ pela regra $g(x) = y$. Portanto,

$$xf(g(x)) + g(x)f(x) \leq 2, \quad (3)$$

enquanto

$$xf(z) + zf(x) > 2, \quad (4)$$

para todo $x > 0$ e para cada $0 < z \neq g(x)$.

Substituindo x por $g(x)$ em (3), segue que $z = g(g(x))$ é a única solução de

$$g(x)f(z) + zf(g(x)) \leq 2.$$

Todavia, $z = x$ também é uma solução dessa inequação por (3). Logo,

$$g(g(x)) = x, \quad \forall x > 0. \quad (5)$$

Utilizando a relação (3) novamente, uma outra aplicação da desigualdade entre as médias fornece

$$\sqrt{xg(x)f(x)f(g(x))} \leq \frac{xf(g(x)) + g(x)f(x)}{2} \leq 1,$$

de sorte que

$$xg(x)f(x)f(g(x)) \leq 1 \quad (6)$$

para todo $x > 0$.

Afirmação 1. $g = \text{Id}$, isto é, $g(x) = x$ para cada $x > 0$.

Se fosse $x \neq g(x)$ para algum x , poderíamos tomar $x = z$ na relação (4) e obter $xf(x) > 1$. Como também vale $g(x) \neq x = g(g(x))$, o mesmo raciocínio implicaria $g(x)f(g(x)) > 1$. Multiplicando essas duas desigualdades, chegaríamos a

$$xg(x)f(x)f(g(x)) > 1,$$

contradizendo (6).

Afirmação 2. $f = r$, ou seja, $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$.

Pelas afirmação 1 e desigualdade (3), obtemos

$$xf(x) \leq 1, \quad \forall x > 0. \quad (7)$$

Se fosse $f(x) \neq \frac{1}{x}$ para algum $x > 0$, teríamos $x_0 := \frac{1}{f(x)} \neq x$. Daí, tomando $z = x_0$ em (4), valeria

$$xf(x_0) + 1 = xf(x_0) + x_0f(x) > 2,$$

ou, equivalentemente, $f(x_0) > \frac{1}{x}$. Contudo, por (7),

$$1 \geq x_0f(x_0) > \frac{x_0}{x} = \frac{1}{xf(x)} \geq 1,$$

o que é contraditório. Então, a única possibilidade é termos $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$, justificando a afirmação 2 e encerrando a solução. $\square$

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em dois ou três encontros de 50 minutos cada.

Mais problemas envolvendo funções podem ser encontrados na sugestão de leitura a seguir.

Sugestão de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 3. Introdução à Análise*. 3ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

Portal OBMEP