# Material Teórico - Módulo de UNIDADES DE MEDIDA DE COMPRIMENTO E DE ÁREAS

## Exercícios Diversos Sobre Áreas de Figuras

### Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

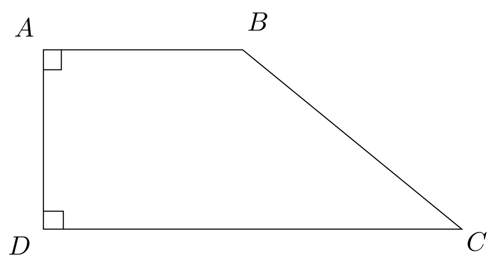
12 de Abril de 2021

# 1 Introdução

Neste material iremos resolver diversos exercícios empregando os conhecimentos e técnicas apresentados nas aulas anteriores. Ao longo das soluções, exercitaremos o emprego das fórmulas para o cálculo as áreas de triângulos, paralelogramos e trapézios. Por outro lado, por vezes, também será útil aplicar técnicas de decomposição de figuras e de criação de grades quadriculadas.

# 2 Exercícios

**Exercício 1** (Olimpíada de Maio). *Um terreno $ABCD$ tem o formato de um trapézio retângulo tal que $AB = 30m$, $AD = 20m$ e $DC = 45m$. Deve-se dividir o terreno em duas partes de mesma área, traçando uma paralela à reta $AD$. A que distância essa paralela deve estar de $AD$?*




**Solução.** A área do trapézio é

$$\frac{20(30+45)}{2} = 750.$$

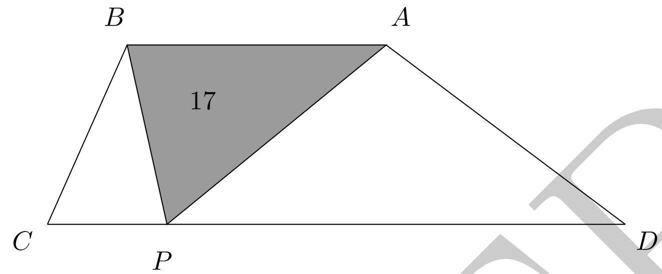
Portanto, a área de cada uma das duas partes deve ser $\frac{750}{2} = 375$.

Como a altura do trapézio é 20, se a parte da esquerda for um retângulo, então sua largura deve ser

$$\frac{375}{20} = 18{,}75.$$

Uma vez que esse último número é menor que o comprimento de $AB$ (que vale 30m), concluímos que a parte da esquerda é realmente um retângulo, e a paralela à reta $AD$ deve estar situada à distância de 18,75m dela. $\square$

**Exercício 2** (OBMEP 2018). *No trapézio $ABCD$ da figura, os lados paralelos $AB$ e $CD$ são tais que o comprimento de $CD$ é o dobro do comprimento de $AB$. O ponto $P$ está sobre o lado $CD$ e determina um triângulo $ABP$ com área igual a 17. Qual é a área do trapézio $ABCD$?*




**Solução.** Suponha que $CD = 2x$, $AB = x$ e que $h$ é a medida da altura do triângulo $ABP$, que é a mesma do trapézio $ABCD$. Assim, temos que

$$[ABP] = \frac{hx}{2} = 17,$$

logo, $hx = 34$.

Agora, calculando-se a área do trapézio $ABCD$, obtemos

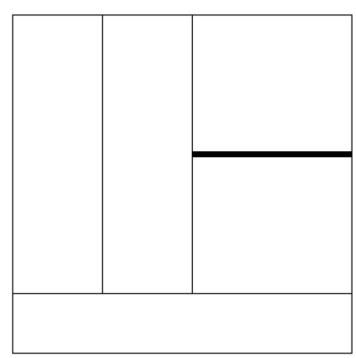
$$[ABCD] = \frac{(x+2x)h}{2} = \frac{3hx}{2}.$$

Substituindo o valor de $hx$, segue que

$$[ABCD] = \frac{3 \cdot 34}{2} = 3 \cdot 17 = 51.$$

$\square$

**Exercício 3** (Olimpíada Argentina). *O quadrilátero maior da figura a seguir é um quadrado e foi dividido em cinco retângulos de mesmas áreas. Se a medida do lado destacado é $10cm$, calcule as dimensões dos retângulos menores.*



**Solução.** Sendo $x$ a altura do retângulo superior que contém o segmento destacado, temos que sua área mede $10x$. Uma vez que a área do retângulo inferior que contém o segmento destacado também vale $10x$, concluímos que sua altura também mede $x$.

À esquerda desses dois retângulos de dimensões 10 e $x$ temos outros dois retângulos, tais que uma de suas dimensões é igual a $2x$. Assim, para que suas áreas valham $10x$, a outra dimensão dos mesmos deve ser

$$\frac{10x}{2x} = 5.$$

Com isso, percebe-se que o lado do quadrado deve medir

$$5 + 5 + 10 = 20,$$

logo, sua área vale

$$20^2 = 400.$$

Por fim, uma vez que o quadrado está decomposto em cinco retângulos de área $10x$, temos que

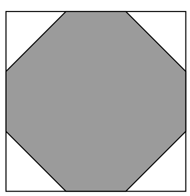
$$5 \cdot 10x = 400,$$

logo,

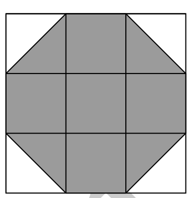
$$x = \frac{400}{50} = 8.$$

Assim, a medida que falta do retângulo da base é $20 - 2 \cdot 8 = 4$, de sorte que temos dois retângulos $10 \times 8$, dois retângulos $5 \times 16$ e um retângulo $20 \times 4$. □

**Exercício 4** (OBMEP 2018). *Na figura a seguir, o octógono cinza está inscrito em um quadrado de modo que seus vértices dividem os lados do quadrado em três partes de medidas iguais. Se a área do octógono é $28cm^2$, calcule a área do quadrado.*



**Solução.** Decomponha o quadrado em nove quadradinhos menores através de uma grade quadriculada, conforme ilustrado na próxima figura.



Note que o octógono é formado por cinco quadradinhos e quatro metades de um quadradinho. Assim, sua área é equivalente a

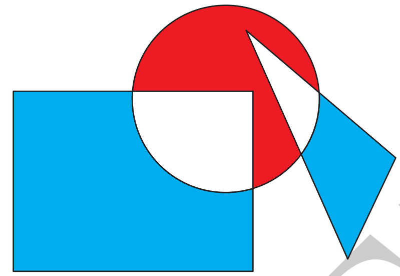
$$5 + 4\frac{1}{2} = 5 + 2 = 7$$

quadradinhos.

Como a área do octógono vale 28, concluímos que a área de cada quadradinho vale $\frac{28}{7} = 4$.

Portanto, a área do quadrado maior (que é equivalente a 9 quadradinhos) mede $4 \times 9 = 36cm^2$. □

**Exercício 5** (OBMEP 2018). *Na figura, temos um retângulo com área igual a $120\ \text{cm}^2$, um circulo com área igual a $81\ \text{cm}^2$ e um triângulo com área igual a $29\ \text{cm}^2$. Qual é a diferença entre a soma das áreas das regiões azuis e a área da região vermelha?*



**Solução.** Seja $A$ a soma das áreas azuis, $B$ a soma das áreas brancas e $V$ a área vermelha. Temos que

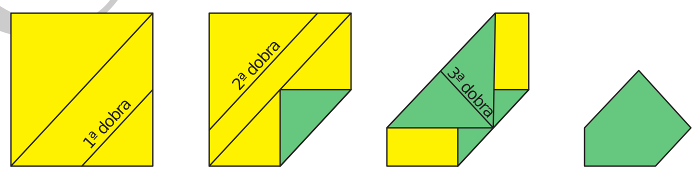
$$\begin{cases} A + B = 120 + 29 = 149, \\ B + V = 81. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira, obtemos:

$$A - V = 149 - 81 = 68cm^2.$$

□

**Exercício 6** (OBMEP 2019). *Uma folha quadrada de 8cm de lado foi dobrada três vezes, conforme mostrado nas figuras a seguir. A primeira e a segunda dobras ficaram paralelas a uma diagonal da folha, ao passo que a terceira dobra ficou perpendicular a essa diagonal. Qual é a área da figura final?*

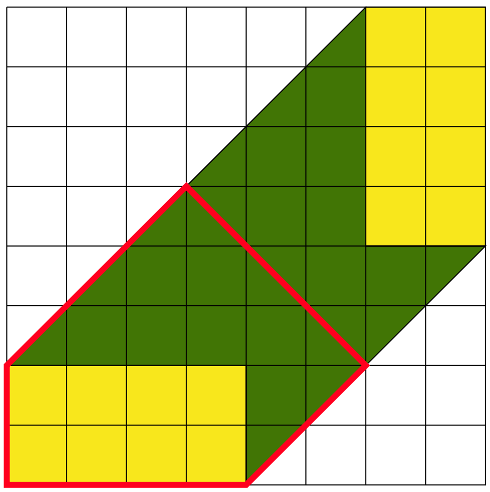



**Solução.** A fim de entendermos melhor as várias dobras, começamos quadriculando a folha amarela em $8 \times 8 = 64$ quadrinhos iguais, cada um deles de lado 1cm (e, portanto, área $1\text{cm}^2$).

A primeira dobra gerou um triângulo verde com um vértice sobre uma diagonal do quadrado. Como ela resultou paralela a essa diagonal, concluímos (acompanhe na próxima figura) que ela dividiu cada lado da folha amarela ao meio.

A segunda dobra também foi feita paralelamente à mesma diagonal do quadrado e fez com que o vértice superior esquerdo da folha amarela coincidisse com o ponto médio da hipotenusa do triângulo verde. Por sua vez, tendo em vista que esse ponto médio está situado sobre a outra diagonal do quadrado, deduzimos que a situação é a ilustrada na próxima figura.

Veja também que, nela, a última dobra foi feita ao longo do segmento vermelho situado sobre a outra diagonal da folha amarela.



Assim, a figura final (contornada em vermelho, acima) é formada por 15 quadradinhos e por 8 metades de quadradinhos. É, pois, equivalente a

$$15 + \left(8 \times \frac{1}{2}\right) = 19$$

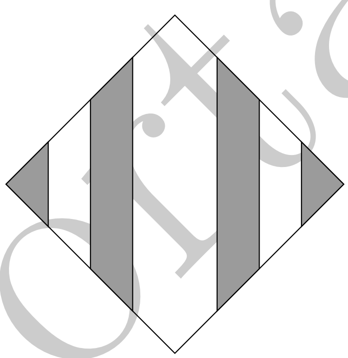
quadradinhos.

Por fim, uma vez que cada um desses quadradinhos tem 1cm de lado, concluímos que a área da figura final vale

$$19 \cdot 1\text{cm}^2 = 19\text{cm}^2.$$

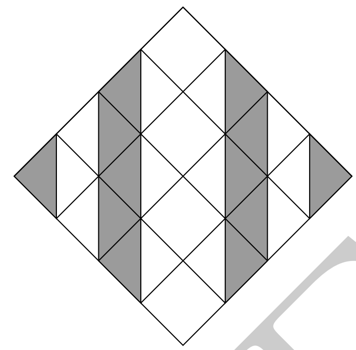
$\square$

**Exercício 7** (OBM). *Uma placa decorativa consiste num quadrado branco de quatro metros de lado, pintado de forma simétrica com partes verticais em cinza, conforme mostrado na figura.*



*Sabendo que as faixas verticais dividem os lados do quadrado em quatro partes, todas de uma mesma medida, pergunta-se: Que fração da área da placa foi pintada?*

**Solução.** Divida o quadrado maior em 16 quadrados menores congruentes entre si, de acordo com o padrão mostrado na figura a seguir.

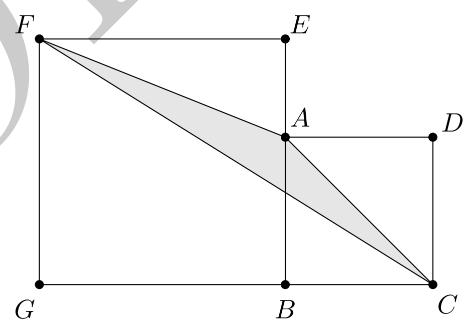


Note que a parte cinza é composta por 12 metades de um quadrado menor. Assim, sua área é equivalente a $\frac{12}{2} = 6$, dos 16 quadrados menores que formam a figura inicial. Portanto, a fração que corresponde à sua área é

$$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

$\square$

**Exercício 8.** *Na figura, $ABCD$ é um quadrado de lado* 10cm e $BEFG$ é um outro quadrado, de lado maior. Qual o valor da área do triângulo $ACF$?




**Solução 1.** Comecemos observando que

$$\begin{aligned}[ACF] &= [ABGF] + [ABC] - [CFG]\\ &= [BEFG] - [AEF] + [ABC] - [CFG].\end{aligned}$$

Agora, sendo $x$ a medida do lado do quadrado maior, temos que

$$[BEFG] = x^2,$$

$$\begin{aligned}[AEF] &= \frac{1}{2}\,AE \cdot EF\\ &= \frac{1}{2}(BE - AB) \cdot EF\\ &= \frac{1}{2}(x - 10)x,\end{aligned}$$

$$[ABC] = \frac{1}{2}[ABCD] = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

e

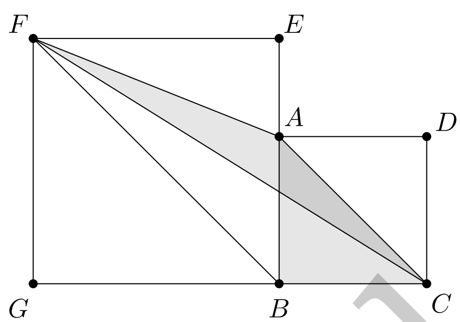
$$
\begin{aligned}
[CFG] &= \frac{1}{2}\, CG \cdot FG \\
&= \frac{1}{2}(BG + BC) \cdot FG \\
&= \frac{1}{2}(x + 10)x.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
[ACF] &= [BEFG] - [AEF] + [ABC] - [CFG] \\
&= x^2 - \frac{1}{2}(x - \cancel{10})x + 50 - \frac{1}{2}(x + \cancel{10})x \\
&= x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + 50 \\
&= 50.
\end{aligned}
$$

□

**Solução 2.** Nas notações da figura a seguir, temos $F\widehat{B}G = 45^\circ = A\widehat{C}B$. Portanto, as retas $BF$ e $AC$ são paralelas.




Portanto, concluímos que os triângulos $ACF$ e $ABC$ têm alturas iguais em relação à base comum $AC$ (tais alturas são iguais à distância entre as paralelas $AC$ e $BF$).

Segue, pois, que

$$[ACF] = [ABC] = \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 50.$$

□

## 3 Sugestões aos Professores

Utilize os exercícios deste material para diagnosticar o grau de entendimento dos seus alunos sobre a noção de área, bem como quanto à aplicação de estratégias de decomposição e construção de grades quadriculadas. Perceba que, ao fazê-lo, também será possível verificar se os estudantes estão empregando as operações básicas com números reais corretamente. Nesse sentido, o professor deve checar se as dificuldades de alguns alunos estão relacionadas ao pensamento geométrico ou ao pensamento algébrico. Dificuldades em diferentes áreas devem ser abordados de formas distintas.

## Referências


[1] Bruno Holanda and Emiliano A. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 2: Primeiros passos em Geometria*. IMPA, 2020.