Material Teórico - Inequações Produto e Quociente do Segundo Grau

Inequações Quociente do Segundo Grau

Primeiro Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de maio de 2020

1 Inequações produto do segundo grau

Neste material, mais uma vez utilizaremos os conhecimentos adquiridos sobre inequações do segundo grau, mas agora para estudar inequações quociente do segundo grau. Iniciamos com o seguinte exemplo:

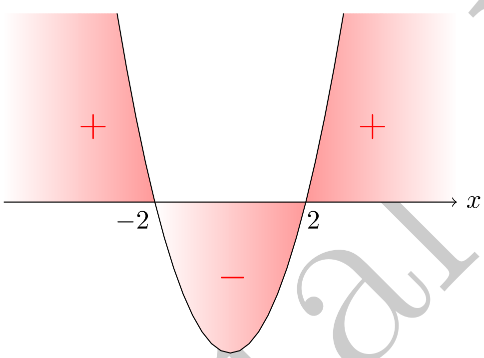
Exemplo 1. *Para quais números reais x vale*

$$\frac{x^2-4}{-x^2+1} \geq 0?$$

Solução. Assim como procedemos com inequações produto, vamos analisar, separadamente, os sinais das funções quadráticas $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = -x^2 + 1$. Veja que

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4 = x^2 - 2^2 \\ &= (x+2)(x-2). \end{aligned}$$

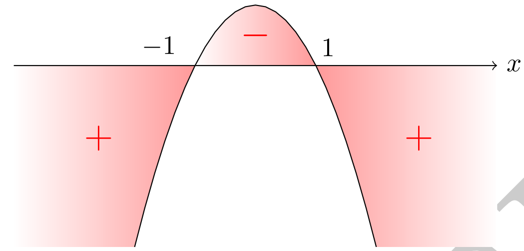
Desse modo, $f(x)$ possui raízes iguais a -2 e 2. Além disso, como o coeficiente de x^2 na expressão algébrica que define f é igual a 1, que é um número real positivo, temos que o gráfico de f é uma parábola côncava para cima:



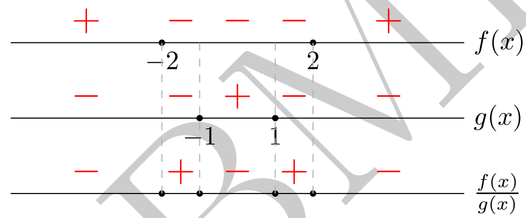
Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^2 + 1 \\ &= -\left(x^2 - 1\right) \\ &= -\left(x^2 - 1^2\right) \\ &= -(x+1)(x-1). \end{aligned}$$

Assim, g possui raízes iguais a -1 e 1 e, uma vez que o coeficiente de x^2 na expressão algébrica que define g é -1, que é um número negativo, o gráfico de g é uma parábola côncava para baixo. A figura a seguir é um esboço desse gráfico:



Agora, o diagrama abaixo utiliza os sinais de $f(x)$ e $g(x)$, os quais estudamos acima, para obter o sinal de $\frac{f(x)}{g(x)}$:



Assim, concluímos que o conjunto-verdade da inequação $\frac{x^2-4}{-x^2+1} \geq 0$ é:

$$\begin{aligned} V &= \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq -2\} \\ &= [-2,-1) \cup (1,2]. \end{aligned}$$

Note que tivemos o cuidado de excluir os valores $x = -1$ e $x = 1$, uma vez que eles anulam $-x^2+1$ e, por conseguinte, tornam sem sentido a fração $\frac{x^2-4}{-x^2+1}$.

Observe também que o diagrama acima é idêntico ao que foi utilizado para resolver as inequações produto, pois as mesmas regras de sinais que valem para o produto também valem para o quociente. Entretanto, frisamos que se deve sempre ter o cuidado de excluir os pontos nos quais o denominador da inequação quociente é igual a zero, uma vez que eles tornam a fração correspondente sem sentido. □

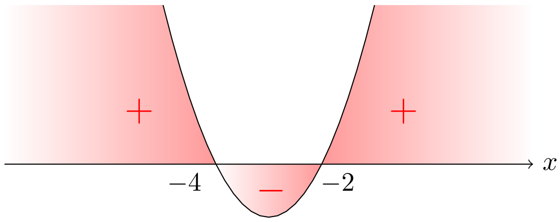
Exemplo 2. *Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação*

$$\frac{x^2+6x+8}{-x^2-2x} < 0.$$

Solução. Repetindo o raciocínio empregado no exemplo anterior, começaremos analisando os sinais das funções quadráticas $f(x) = x^2 + 6x + 8$ e $g(x) = -x^2 - 2x$. Vamos fatorar a expressão de $f(x)$ para encontrar as suas raízes:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 8 \\ &= x^2 + 2x + 4x + 8 \\ &= x(x+2) + 4(x+2) \\ &= (x+2)(x+4) \end{aligned}$$

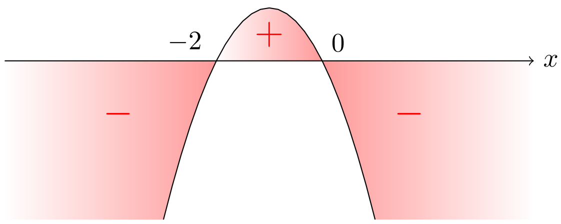
Assim, $f(x)$ possui raízes iguais a -2 e -4. Como o coeficiente de x^2 de $f(x)$ é 1, o gráfico de f é uma parábola que possui concavidade voltada para cima, logo, possui a seguinte forma:



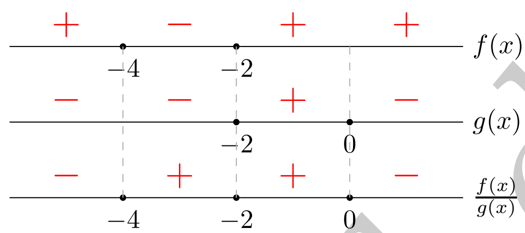
Agora,

$$g(x) = -x^2 - 2x = -x(x+2),$$

logo, g possui raízes iguais a -2 e 0. Além disso, uma vez que o coeficiente de x^2 na expressão que define g é igual a -1, o gráfico de g é uma parábola côncava para baixo. Um esboço dessa parábola pode ser vista na figura a seguir:



No diagrama abaixo, utilizamos os sinais de $f(x)$ e $g(x)$, estudados acima, para obter o sinal de $\frac{f(x)}{g(x)}$:



Portanto, tendo novamente o cuidado de excluir os valores de x que anulam o denominador, concluímos que o conjunto-verdade da inequação $\frac{x^2+6x+8}{-x^2-2x} < 0$ é:

$$\begin{aligned} V &= \{x \in \mathbb{R} | x < -4 \text{ ou } x > 0\} \\ &= (-\infty, -4) \cup (0, +\infty). \end{aligned}$$

□

Ainda em relação ao exemplo anterior, uma solução alternativa, ligeiramente mais simples, consistiria em primeiramente notar que, para $x \neq -2$, tem-se

$$\frac{x^2+6x+8}{-x^2-2x} = \frac{\cancel{(x+2)}(x+4)}{-x\cancel{(x+2)}} = -\frac{x+4}{x}.$$

Assim, bastaria resolver a inequação quociente de *primeiro grau* $\frac{x+4}{x} > 0$.

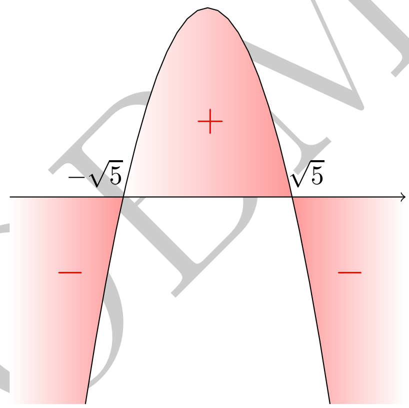
Exemplo 3. *Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação*

$$\frac{-x^2+5}{x^2+4x-5} \leq 0.$$

Solução. Como nos exemplos anteriores, vamos analisar separadamente os sinais das funções quadráticas $f(x) = -x^2+5$ e $g(x) = x^2+4x-5$. Fatorando $f(x) = -x^2+5$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) = -x^2+5 &= -\left(x^2-5\right) \\ &= -\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

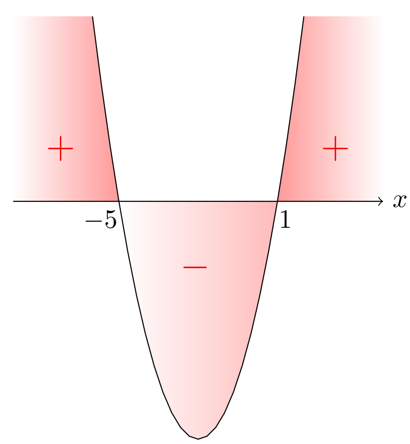
Assim, as raízes de $f(x)$ são iguais a $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$. Como o coeficiente de x^2 na expressão de $f(x)$ é -1, a parábola que representa o gráfico de f possui concavidade voltada para baixo. A figura a seguir é um esboço desse gráfico:



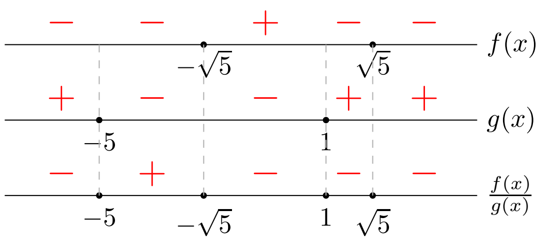
Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2+4x-5 \\ &= x^2-x+5x-5 \\ &= x(x-1)+5(x-1) \\ &= (x-1)(x+5), \end{aligned}$$

de sorte que g possui raízes 1 e -5. Agora, como o coeficiente de x^2 em x^2+4x-5 é igual a 1, a parábola que representa o gráfico de g possui concavidade voltada para cima. Veja, na figura abaixo, um esboço do gráfico de g:



O próximo diagrama traz o estudo do sinal de $\frac{f(x)}{g(x)}$ a partir dos sinais de $f(x)$ e $g(x)$, os quais foram estudados acima.



Concluímos, assim, que o conjunto-verdade da inequação $\frac{-x^2+5}{x^2+4x-5} \leq 0$ é

$$\begin{aligned} V &= \{x \in \mathbb{R} | x < -5 \text{ ou } -\sqrt{5} \leq x \neq 1\} \\ &= (-\infty, -5) \cup [-\sqrt{5}, 1) \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

Mais uma vez chamamos a atenção para o fato de que as raízes da função quadrática que está no denominador da inequação quociente devem ser excluídas do conjunto-verdade, ainda que o símbolo utilizado na inequação não seja de desigualdade estrita. $\square$

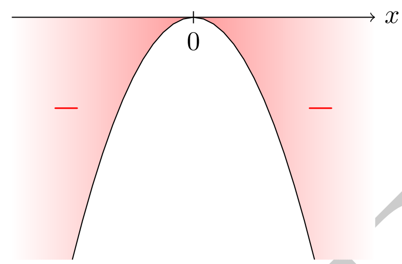
Exemplo 4. *Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação*

$$\frac{-1}{x^2-1} > 1.$$

Solução. Inicialmente, veja que

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x^2-1} > 1 &\iff \frac{-1}{x^2-1} - 1 > 0 \\ &\iff \frac{-1-1\cdot(x^2-1)}{x^2-1} > 0 \\ &\iff \frac{-1-x^2+1}{x^2-1} > 0 \\ &\iff \frac{-x^2}{x^2-1} > 0. \end{aligned}$$

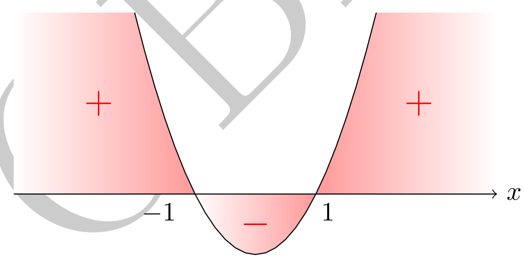
Desse modo, vamos estudar os sinais das funções $f(x) = -x^2$ e $g(x) = x^2 - 1$. Veja que $f(x)$ possui uma única raiz, em $x = 0$, logo, o gráfico de f tangencia o eixo das abcissas nesse ponto. Além disso, como o coeficiente de x^2 na expressão que define $f(x)$ é igual a -1, a parábola que representa o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo. A próxima figura mostra um esboço desse gráfico.



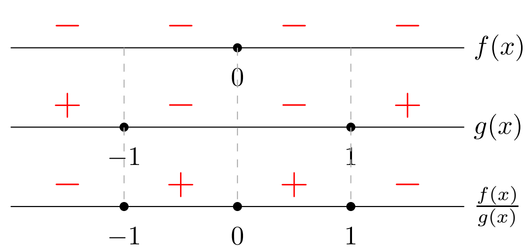
Analogamente, uma vez que

$$g(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1),$$

concluímos que $g(x)$ possui raízes iguais a -1 e 1. Além disso, como o coeficiente de x^2 em $x^2 - 1$ é igual a 1, o gráfico de g é uma parábola côncava para cima. A figura abaixo é um esboço desse gráfico.



No diagrama abaixo, fazemos o estudo do sinal de $\frac{f(x)}{g(x)}$ tendo como base os estudos dos sinais de $f(x)$ e $g(x)$, feitos acima:



Desse modo, obtemos o conjunto-verdade da inequação $\frac{-1}{x^2-1} > 1$, que é o mesmo da inequação $\frac{-x^2}{x^2-1} > 0$, é igual a:

$$\begin{aligned} V &= \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0 \text{ ou } 0 < x < 1\} \\ &= (-1, 0) \cup (0, 1). \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 5. *Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação*

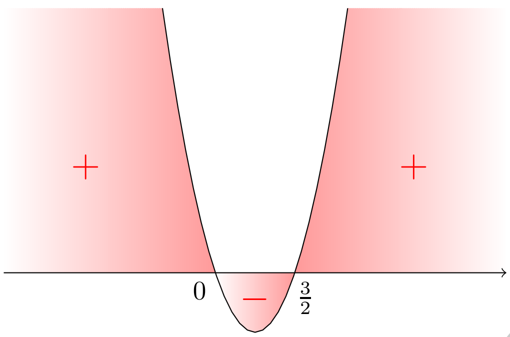
$$\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-2} \geq 0.$$

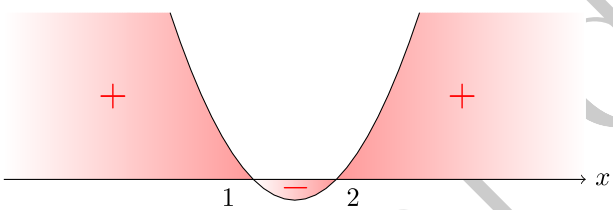
Solução. Inicialmente, vamos transformar a inequação dada em uma inequação quociente, operando a soma do primeiro membro:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-2} &= \frac{x(x-2)+x(x-1)}{(x-1)(x-2)}\\ &= \frac{x(x-2+x-1)}{(x-1)(x-2)}\\ &= \frac{x(2x-3)}{(x-1)(x-2)}.\end{aligned}$$

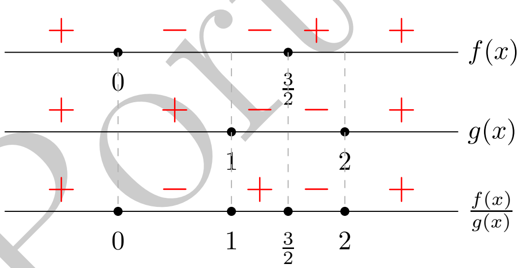
Daí, em vez de resolver a inequação $\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-2}\geq 0$, resolveremos a inequação quociente $\frac{x(2x-3)}{(x-1)(x-2)}\geq 0$. Para isso, analisaremos os sinais das funções quadráticas $f(x)=x(2x-3)$ e $g(x)=(x-1)(x-2)$, repetindo os argumentos utilizados nos exemplos anteriores.

Assim fazendo, é fácil perceber que os gráficos de f e g são, respectivamente, as parábolas esboçadas nas figuras seguintes:





No diagrama abaixo, fazemos o estudo do sinal de $\frac{f(x)}{g(x)}$:



Logo, o conjunto-verdade da inequação $\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-2}\geq 0$ é

$$V=(-\infty,0]\cup\left(1,\frac{3}{2}\right]\cup(2,+\infty).$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

Assim como no material sobre Inequações Produto, neste material também optamos por não utilizar fórmulas prontas para encontrar as raízes das funções quadráticas que foram tratadas. Recomendamos que o professor proponha aos alunos que tentem encontrar as raízes utilizando outros métodos.

O professor também deve chamar a atenção dos alunos para o fato de que as raízes da função quadrática que está no denominador da inequação não pertencem ao conjunto verdade, independentemente do símbolo de desigualdade utilizado.

As leituras complementares a seguir contêm material adicional sobre inequações envolvendo funções quadráticas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.