Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivada como Função

Exercícios - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

08 de Janeiro de 2024

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Continuaremos apresentando exemplos relacionados ao material estudado nesse módulo. Desta feita, consideraremos problemas envolvendo a noção de convexidade e a desigualdade de Jensen.

Exemplo 1 (USAMO - 2000, Problema 1). *Dizemos que uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é* muito convexa *se*

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+|x-y|, \qquad (1)$$

para quaisquer números reais x e y. Prove que não existe nenhuma função muito convexa.

Solução. Digamos que f seja uma função muito convexa. Defina $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ pela regra $g(x)=(f(x)-f(0))/x$. Em termos geométricos, g é a inclinação da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(0,f(0))$ e $(x,f(x))$. Vejamos que

$$g(x)\geq g(-x)+4,, \;\; \forall\; x>0. \qquad (2)$$

Com efeito, essa desigualdade se escreve como

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}\geq\frac{f(0)-f(-x)}{x}+4$$

ou ainda,

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}\geq f(0)+2x,$$

que nada mais é do que (1), ao se fazer $y=-x$.

Por outro lado, para $y=0$, a relação (1) toma a forma

$$\frac{f(x)+f(0)}{2}\geq f(x/2)+|x|,$$

ou melhor,

$$\frac{f(x)-f(0)}{2}\geq(f(x/2)-f(0))+|x|.$$

(Subtraia $f(0)$ de ambos membros). Se dividirmos cada membro da desigualdade anterior por $x/2$, chegaremos às inequações

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \geq \frac{f(x/2)-f(0)}{x/2} + 2, \ \forall\, x > 0,$$

e

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \leq \frac{f(x/2)-f(0)}{x/2} - 2, \ \forall\, x < 0.$$

Portanto, vale

$$g(x) \geq g(x/2) + 2 \ \text{ e } \ g(-x) \leq g(-x/2) - 2,$$

para cada número real positivo x. Daí, segue que

$$g(x) - g(-x) \geq g(x/2) - g(-x/2) + 4,$$

para todo $x > 0$. Assim, fica fácil, por indução matemática, estabelecer a seguinte desigualdade:

$$g(x) \geq g(-x) + 4n, \tag{3}$$

para quaisquer $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. De fato, a base de indução consiste da relação (2), enquanto o passo de indução (admitindo a validade de (3) para um certo natural n) segue de

$$\begin{aligned} g(x) - g(-x) &\geq g(x/2) - g(-x/2) + 4 \\ &\geq 4n + 4 = 4(n+1), \end{aligned}$$

em que a hipótese de indução foi utilizada com $x/2$ e $-x/2$ no lugar de x e $-x$, respectivamente.

Porém, é evidente que (3) gera uma contradição ao se fazer $n \to \infty$ (com $x > 0$ fixado), qual seja, $g(x) = +\infty$.

Desse modo, funções muito convexas não podem existir.

□

Para o próximo exemplo, convém relembrar a seguinte propriedade característica das funções convexas (vide seção 3 da aula anterior): se AB e BX são cordas consecutivas do gráfico de uma função convexa (estando o ponto A "mais à esquerda”), a inclinação m_{ab} da reta $\overleftrightarrow{AB}$ não supera a inclinação m_{bx} da reta $\overleftrightarrow{BX}$.

Em símbolos, se $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa e $a < b < x$ são pontos de I, então

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}. \tag{4}$$

Exemplo 2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Se f não for constante, prove que*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Solução. Como f não é constante, existem números $a < b$ tais que $f(a) \neq f(b)$. Se ocorrer $f(a) < f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$), provaremos que $f(x)$ tende a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Com efeito, seja g a função afim cujo gráfico é a reta passando pelos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$. Logo,

$$g(x) = f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b).$$

Pela desigualdade (4), vale

$$g(x) \leq f(b) + \frac{f(x)-f(b)}{\cancel{x-b}}(\cancel{x-b}) = f(x),$$

para cada número real $x > b$. Dessa relação e do fato de que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (+\infty) = +\infty,$$

segue imediatamente a igualdade

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

$\square$

Observação 3. *O exemplo anterior admite a seguinte formulação para funções côncavas: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função* côncava *não constante, então*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

A justificativa é imediata, bastando lembrar que f é côncava se, e só se, $-f$ é convexa.

Exemplo 4 (IMC - 2020, Problema 5). *Determine todas as funções duas vezes deriváveis $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ satisfazendo a desigualdade*

$$f''(x)f(x) \geq 2f'(x)^2, \tag{5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Seja f uma função satisfazendo as hipóteses do problema. Afirmamos que $g := 1/f$ é uma função côncava. De fato, pelos resultados da aula passada, basta provar que $g''(x) \leq 0$, para cada número real x. Pela regra do quociente,

$$g'(x) = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f(x)^2} = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

enquanto

$$g''(x) = -\frac{f''(x)f(x)^2 - f'(x)(2f'(x)f(x))}{f(x)^4}$$

$$= -\frac{f''(x)f(x) - 2[f'(x)]^2}{f(x)^3} \leq 0,$$

por (5) e pela positividade de f.

Agora, de acordo com a observação 3, ou g é constante ou g deve assumir valores negativos. Como $g = 1/f$ é positiva, segue que g é constante e, com maior razão, f também o é.

Por fim, como toda função constante positiva satisfaz as condições do enunciado, concluímos que as únicas funções duas vezes deriváveis $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ cumprindo a condição (5) são as constantes positivas. $\square$

Exemplo 5. *Sejam $a_1,a_2,\ldots,a_n$ números reais positivos cuja soma é uma constante S. Determine, em função de S, o valor mínimo da expressão*

$$a_1^{a_1}a_2^{a_2}\ldots a_n^{a_n}.$$

Solução. Considere a função $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x\ln x$. Um cálculo simples, com o auxílio da regra do produto, dá $f''(x)=1/x>0$, para todo $x>0$. Pelo corolário 8 da aula anterior, f é estritamente convexa. Pela desigualdade de Jensen, podemos escrever

$$\frac{S}{n}\cdot\ln\left(\frac{S}{n}\right)\le\frac{a_1\ln a_1+a_2\ln a_2+\ldots+a_n\ln a_n}{n},$$

ou seja,

$$\frac{\ln(S/n)^S}{n}\le\frac{\ln a_1^{a_1}a_2^{a_2}\ldots a_n^{a_n}}{n},$$

de forma que

$$(S/n)^S\le a_1^{a_1}a_2^{a_2}\ldots a_n^{a_n}.$$

Como a igualdade na desigualdade anterior ocorre quando (e somente quando) $a_1=\ldots=a_n$, concluímos que o valor mínimo da expressão $a_1^{a_1}a_2^{a_2}\ldots a_n^{a_n}$ é $(S/n)^S$. $\square$

Exemplo 6 (A desigualdade de Nesbitt). *Se a,b e c são números reais positivos, mostre que*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a=b=c$.

Solução. Considere a função $\varphi:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(x)=x/(1-x)$. Vejamos que φ é estritamente convexa.

As derivadas de φ podem ser calculadas utilizando a regra do quociente:

$$\varphi'(x) = \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Observando que φ' é crescente, já obtemos a conclusão desejada (pelo teorema 6 da aula passada). Alternativamente, poderíamos calcular

$$\varphi''(x) = \frac{0 \cdot (1-x)^2 - 1 \cdot (2x-2)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3},$$

e notar que $\varphi''(x) > 0$, para todo $x < 1$.

Agora sejam

$$x_1 = \frac{a}{a+b+c},\ \ x_2 = \frac{b}{a+b+c},\ \ x_3 = \frac{c}{a+b+c},$$

de maneira que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ e

$$\varphi(x_1) = \frac{a}{b+c},\ \ \varphi(x_2) = \frac{b}{a+c},\ \ \varphi(x_3) = \frac{c}{a+b}.$$

Pelo corolário 14 da aula anterior, temos

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &= \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) \\
&= 3 \cdot \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3)}{3} \\
&\geq 3\varphi\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \\
&= 3\varphi(1/3) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Quanto à igualdade, ela ocorre se, e só se, $x_1 = x_2 = x_3$, ou seja, se, e só se, $a = b = c$. □

De acordo com a aula passada, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forem números reais positivos e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ formarem um sistema de pesos [1], dizemos que

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n$$

[1]Isto é, cada t_i for não negativo e $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

é a *média aritmética ponderada* dos $x_i's$, com pesos $t_i's$.

Também podemos definir a *média geomética ponderada* daqueles números, com os respectivos pesos, como a expressão

$$x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}.$$

Quando os pesos forem todos iguais, isto é, $t_1 = \ldots = t_n = 1/n$, as médias acima coincidem com as médias aritmética e geométrica previamente estudadas.

Exemplo 7. *Nas notações acima, prove a desigualdade entre as médias ponderadas aritmética e geométrica:*

$$x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n. \tag{6}$$

Além disso, se os pesos $t_i's$ forem todos positivos, a igualdade em (6) *ocorre se, e só se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

Solução. Como sabemos do exemplo 12 da aula anterior, a função logaritmo natural ln é estritamente côncava. Logo, pelas propriedades da função logaritmo e pela desigualdade de Jensen, temos

$$\begin{aligned} \ln(x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}) &= t_1 \ln x_1 + t_2 \ln x_2 + \ldots + t_n \ln x_n \\ &\leq \ln \Big(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n \Big). \end{aligned}$$

Como ln é crescente, segue a desigualdade (6). Ademais, caso os pesos $t_i's$ sejam todos positivos, a concavidade estrita de ln garante, ainda pela desigualdade de Jensen, que a igualdade em (6) ocorre se, e só se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. □

Exemplo 8. *Sejam x, y, p, q números reais positivos. Se p e q satisfazem a relação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, prove a* desigualdade de Young*:*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$

com igualdade se, e só se, $x^p = y^q$.

Solução. Basta aplicar a desigualdade entre as médias ponderadas aos números x^p, y^q, com os pesos $1/p$, $1/q$:

$$xy = (x^p)^{1/p}(y^q)^{1/q} \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

$\square$

Exemplo 9 (IMO - 2020, Problema 2). *Os números reais a, b, c, d são tais que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ e $a + b + c + d = 1$. Prove que*

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1. \tag{7}$$

Solução. Como a, b, c, d formam um sistema de pesos, a desigualdade entre as médias ponderadas implica

$$a^a b^b c^c d^d \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Assim, basta provar que

$$(a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2) < 1 = (a+b+c+d)^3. \tag{8}$$

Mantendo em mente as desigualdades $a \geq b \geq c \geq d > 0$ e $b^2 + c^2 + d^2 < (b + c + d)^2$, temos

$$\begin{aligned}
&(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leq \\
&\leq [a + 3(b + c + d)][a^2 + (b^2 + c^2 + d^2)] \\
&= a^3 + 3a^2(b + c + d) + a(b^2 + c^2 + d^2) \\
&\quad + 3(b + c + d)(b^2 + c^2 + d^2) \\
&< a^3 + 3a^2(b + c + d) + a(b + c + d)^2 \\
&\quad + 3(b + c + d)(b^2 + c^2 + d^2) \\
&= a^3 + 3a^2(b + c + d) \\
&\quad + (b + c + d)[a(b + c + d) + 3(b^2 + c^2 + d^2)].
\end{aligned}$$

Agora, como

$$\begin{aligned}
(a + b + c + d)^3 &= [a + (b + c + d)]^3 \\
&= a^3 + 3a^2(b + c + d) + \\
&\quad + 3a(b + c + d)^2 + (b + c + d)^3,
\end{aligned}$$

é suficiente provar que

$$\begin{aligned}&(b+c+d)[a(b+c+d)+3(b^2+c^2+d^2)] \le \\ &\le 3a(b+c+d)^2+(b+c+d)^3,\end{aligned}$$

ou, ainda, que

$$\begin{aligned}&a(b+c+d)+3(b^2+c^2+d^2) \le \\ &\le 3a(b+c+d)+(b+c+d)^2.\end{aligned}$$

Para o que falta, utilizando uma vez mais que $a \ge b \ge c \ge d > 0$ e $b^2+c^2+d^2 < (b+c+d)^2$, obtemos

$$\begin{aligned}&a(b+c+d)+3(b^2+c^2+d^2) = \\ &= [a(b+c+d)+2(b^2+c^2+d^2)]+(b^2+c^2+d^2) \\ &< [a(b+c+d)+2(ab+ac+ad)]+(b+c+d)^2 \\ &= 3a(b+c+d)+(b+c+d)^2,\end{aligned}$$

conforme desejado. □

Dicas para o Professor

O leitor encontrará mais exemplos nos textos abaixo. Mais especificamente, sugerimos os exercícios da seção 3.6 de [1], os problemas 7 - 11 de [2] e a seção 1.5 da última referência.

Uma ou duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. A. Caminha. *Desigualdades Elementares*. Revista Eureka! nº 5, 1999.

3. R. B. Manfrino. et al. *Inequalities. A Mathematical Olympiad Approach*. Birkhäuser, 2009.