Material Teórico - Módulo de Geometria Analítica 2

Círculos

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

9 de julho de 2018

1 Equação reduzida de um círculo

Consideremos um ponto $O = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e um número real $r > 0$. Chamamos de **círculo** de **centro** O e **raio** $r > 0$, o conjunto C de todos os pontos P que estão a uma distância r do ponto O.

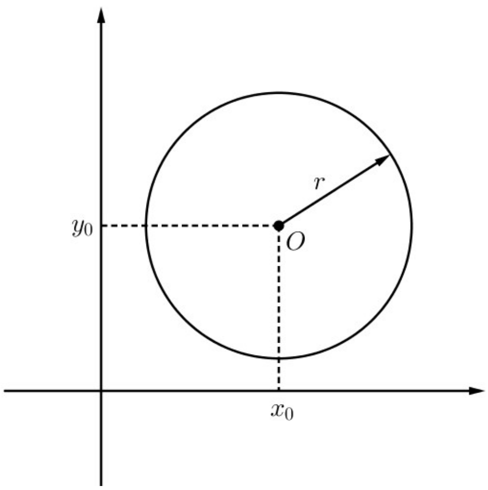

Figura 1: o círculo C de centro O e raio r.

Se $P = (x, y)$ é um ponto do círculo C, então $d(P, O) = r$, ou seja,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa última igualdade, obtemos

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{1}$$

Reciprocamente, uma vez satisfeita a igualdade acima, extraindo raízes quadradas em ambos os membros da mesma concluímos que $d(P, O) = r$, isto é, que P pertence ao círculo C. Assim, (1) é condição necessária e suficiente para que o ponto $P = (x, y)$ pertença ao círculo C, de forma que a denominamos de **equação reduzida do círculo**.

Exemplo 1. *Encontre a equação reduzida do círculo de centro* $(1, 2)$ *e raio* 3.

Solução. Fazendo, em (1), as substituições $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ e $r = 3$, obtemos a equação reduzida $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$. □

Exemplo 2. *Encontre a equação reduzida do círculo de centro* $(1, 1)$, *que passa pelo ponto* $(4, 5)$.

Solução. Como já sabemos as coordenadas do centro desse círculo, a fim de poder aplicar (1) basta que encontremos seu raio r. Para tanto, basta calcularmos a distância entre um de seus pontos e o centro. Como o ponto $(4, 5)$, pertencente ao círculo, foi dado, temos

$$r = \sqrt{(4 - 1)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Logo, a equação reduzida desse círculo é $(x-1)^2+(y-1)^2 = 5^2$. □

Exemplo 3. *Encontre a equação reduzida do círculo que passa pelos pontos* $A = (1, 4), B = (-1, 0)$ *e* $C = (5, 2)$.

Solução. Em geral, três pontos não colineares determinam um único círculo, exatamente o círculo *circunscrito* ao triângulo cujos vértices são esses três pontos (veja a Figura 2).

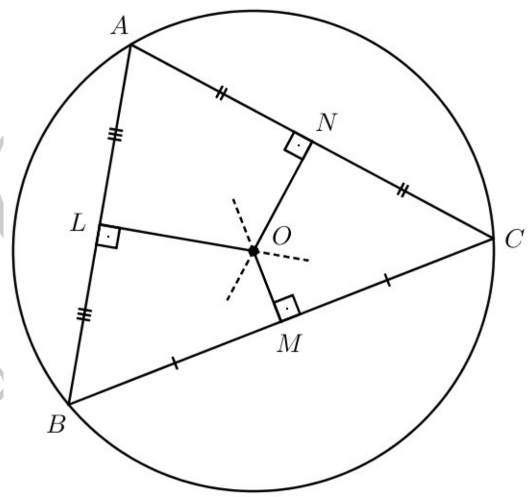

Figura 2: o circuncentro O do triângulo ABC é o ponto de interseção das mediatrizes de seus lados.

Para calcular as coordenadas do centro do círculo, consideremos os pontos médios de dois dos três lados do triângulo, digamos o ponto médio M de BC e o ponto médio N de AC. Já aprendemos que as coordenadas do ponto médio de um segmento são as médias aritméticas das respectivas coordenadas dos extremos desse segmento. Logo,

$$M = \left(\frac{-1 + 5}{2}, \frac{0 + 2}{2}\right) = (2, 1)$$

e

$$N = \left(\frac{5 + 1}{2}, \frac{4 + 2}{2}\right) = (3, 3).$$

O coeficiente angular da reta que passa por B e C é

$$m_{BC} = \frac{2 - 0}{5 - (-1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

enquanto o coeficiente angular da reta que passa por C e A é

$$m_{CA} = \frac{4-2}{1-5} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

As retas $\overleftrightarrow{MO}$ e $\overleftrightarrow{NO}$, sendo respectivamente perpendiculares às retas não horizontais $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, têm coeficientes angulares m_{MO} e m_{NO} tais que $m_{MO} \cdot m_{BC} = -1$ e $m_{NO} \cdot m_{AC} = -1$. Portanto,

$$m_{MO} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow m_{MO} = -3$$

e

$$m_{NO} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow m_{AC} = 2.$$

Assim, a equação da reta $\overleftrightarrow{MO}$ é $y - 1 = -3(x-2)$ e a equação da reta $\overleftrightarrow{NO}$ é $y - 3 = 2(x-3)$.

Resolvendo o sistema linear formado por essas duas equações, encontramos as coordenadas de seu ponto de interseção O:

$$\begin{cases} 3x + y &= 7 \\ -2x + y &= -3 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 1,$$

ou seja, $O = (2, 1)$.

Por fim, para calcular o raio do círculo, basta calcular a distância de O a qualquer um dos pontos A, B ou C. Por exemplo,

$$r = d(O, A) = \sqrt{(1-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}.$$

Concluímos, assim, que a equação reduzida do círculo que passa por A, B e C é

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10.$$

□

2 Equação geral de um círculo

Observando a equação reduzida do círculo com centro (x_0, y_0) e raio r, qual seja,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

podemos desenvolver os quadrados para obter

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 - r^2 = 0$$

ou, ainda,

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0. \qquad (2)$$

Em geral, se A, B, C, D, E e F são números reais dados, o conjunto dos pontos (x, y) do plano que satisfazem a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

pode, ou não, ser um círculo. Por exemplo, apenas o par ordenado $(x, y) = (0, 0)$ satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 0$, nenhum par ordenado satisfaz a equação $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (pois $x^2 + y^2 + 1 \geq 1 > 0$) e o conjunto dos pares ordenados que satisfazem a equação $x^2 - y^2 = 0$ é a união das duas retas, de equações $y = x$ e $y = -x$.

Comparando as equações (2) e (3), vemos que, para que (3) represente um círculo, devemos necessariamente ter, $A = B \neq 0$ e $C = 0$. Realmente, sendo este o caso, (3) tem o seguinte aspecto:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0; \qquad (4)$$

então, dividindo ambos os membros por A (que é não nulo, por hipótese), obtemos

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0. \qquad (5)$$

Mesmo assim, a última equação acima ainda pode não representar um círculo. Por exemplo, se $D = E = 0$ e $F = A$, obtemos a equação $x^2 + y^2 + 1 = 0$, que não é equação de um círculo, como já vimos anteriormente.

O exemplo a seguir ilustra o método geral que pode ser usado para checar se uma equação da forma (3) representa um círculo.

Exemplo 4. *Verifique se a equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ representa um círculo.*

Solução. As expressões $x^2 - 2x + 1$ e $y^2 - 6y + 9$ são os trinômios quadrados perfeitos, $(x-1)^2$ e $(y-3)^2$, respectivamente. Assim, somando $1 + 9 = 10$ a ambos os membros da equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$, obtemos $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 10$, ou seja, $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$. Obviamente, esta é a equação reduzida do círculo de centro $(1, 3)$ e raio $\sqrt{10}$. □

O método usado no exemplo anterior é chamado *completamento de quadrados*, pois somamos constantes à equação de modo a aparecerem trinômios quadrados perfeitos. No que segue, vamos utilizar tal método para examinar (5).

Retornando ao caso geral, podemos reescrever a equação (5) como

$$x^2 + 2\frac{D}{2A}x + y^2 + 2\frac{E}{2A}y + \frac{F}{A} = 0. \qquad (6)$$

Agora, observe que $x^2 + 2\frac{D}{2A}x$ e $y^2 + 2\frac{E}{2A}y$ são as duas primeiras parcelas dos desenvolvimentos dos quadrados $\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2$ e $\left(y + \frac{E}{2A}\right)^2$, respectivamente; as parcelas que faltam são $\frac{D^2}{4A^2}$ e $\frac{E^2}{4A^2}$, também respectivamente. Portanto, somando $\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2}$ a ambos os membros de (6), obtemos

$$x^2 + 2\frac{D}{2A}x + \frac{D^2}{4A^2} + y^2 + 2\frac{E}{2A}y + \frac{E^2}{4A^2} + \frac{F}{A} = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2}$$

ou, ainda,

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}-\frac{F}{A}$$

Então, (5) equivale a

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}. \qquad (7)$$

Portanto, para que a equação (3) represente um círculo, é necessário e suficiente que $A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2+E^2-4AF > 0$. Neste caso, o círculo tem centro $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ e raio $r = \dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2|A|}$.

Exemplo 5. *Em cada caso abaixo, verifique se a equação dada representa um círculo.*

(a) $x^2 + 3y^2 + x + y - 4 = 0$.

(b) $-3x^2 - 3y^2 + 6x - 12y + 15 = 0$.

(c) $x^2 + y^2 + 3xy + x - y + 2 = 0$.

Solução.
(a) Como $A = 1 \neq 3 = B$, a equação não representa um círculo.

(b) Neste caso, temos $A = B = -3$, $C = 0$, $D = 6$, $E = -12$ e $F = 15$. Logo,

$$D^2 + E^2 - 4AF = 6^2 + (-12)^2 - 4\cdot(-3)\cdot 15 = 360 > 0,$$

de sorte que a equação dada representa o círculo de centro $(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}) = (1, -2)$ e raio $r = \frac{\sqrt{360}}{6} = \sqrt{10}$.

(c) Como $C = 3 \neq 0$ neste caso, a equação não representa um círculo. □

3 Potência de ponto em relação a um círculo

Ao longo desta seção, dados pontos distintos X e Y, usaremos XY, em vez de $\overline{XY}$, para indicar o *comprimento com sinal* do segmento XY. Mais precisamente, sendo r a reta que passa por X e Y, e munindo r de uma *orientação*, isto é, um sentido positivo de percurso, temos XY positivo (resp. negativo), conforme o sentido de X para Y concorde (resp. discorde) do sentido positivo em r.

Em particular, se X, Y, Z são pontos colineares (e dois a dois distintos), é imediato verificar que o produto $XY \cdot YZ$ dos comprimentos com sinal dos segmentos XY e YZ é negativo se, e somente se, os segmentos XY e YZ têm sentidos *discordantes*.

Fixados no plano um círculo C de centro O e raio $r > 0$ e um ponto P, consideremos uma reta que passa por P e encontra o círculo nos pontos A e A', possivelmente iguais (situação que ocorre quando a semirreta tangencia C em $A = A'$). O produto

$$PA \cdot PA' \qquad (8)$$

dos comprimentos com sinal dos segmentos PA e PA' é chamado a **potência do ponto P em relação ao círculo C**.

Se P pertence ao círculo, então tal produto é sempre 0, uma vez que A ou A' coincidirão com P. Suponha, pois, que P não pertence ao círculo. Nosso objetivo é mostrar que a potência de P em relação a C *está bem definida*, no sentido de não depender da escolha particular da reta que passa por P e intersecta C, mas apenas do ponto P e do círculo C. Para tanto, observe os dois círculos da Figura 3.

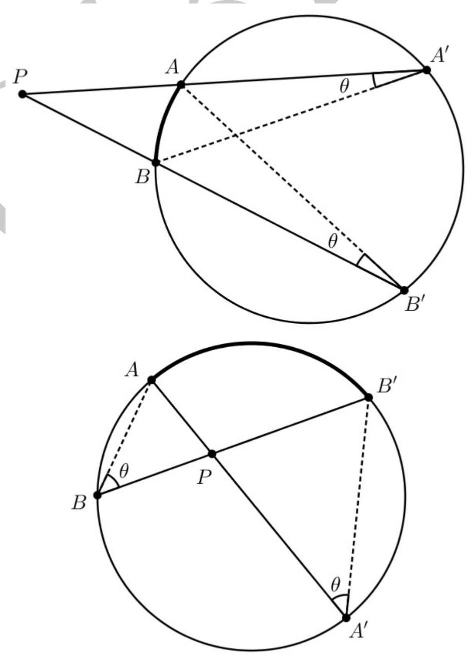

Figura 3: a potência do ponto P em relação ao círculo C.

Inicialmente, veja que se P é exterior ao disco delimitado pelo círculo, então os segmentos PA e PA' têm o mesmo sentido, enquanto, se P é interior a tal disco, então PA e PA' têm sentidos contrários. Logo, $PA \cdot PA'$ (e, da mesma forma, $PB \cdot PB'$) é positivo no primeiro caso e negativo no segundo. Por outro lado, já sabemos de estudos anteriores de Geometria Euclidiana que

$$\overline{PA}\cdot\overline{PA'} = \overline{PB}\cdot\overline{PB'}.$$

(Recordando, tal igualdade segue da semelhança de triângulos $PA'B \simeq PB'A$.) Portanto, como comprimentos com sinais, ainda temos

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB'.$$

Resumindo, os argumentos acima garantem que a potência de P em relação a C é um conceito bem definido, sendo 0 para P sobre C, positiva para P exterior ao disco delimitado por C e negativa para P interior a tal disco.

Se a reta que passa por P encontra o círculo C em apenas um ponto, ou seja, se ela é tangente ao círculo, então (Figura 4, acima), da semelhança entre os triângulos PAT e PTA', segue que $PT^2 = PA \cdot PA'$.

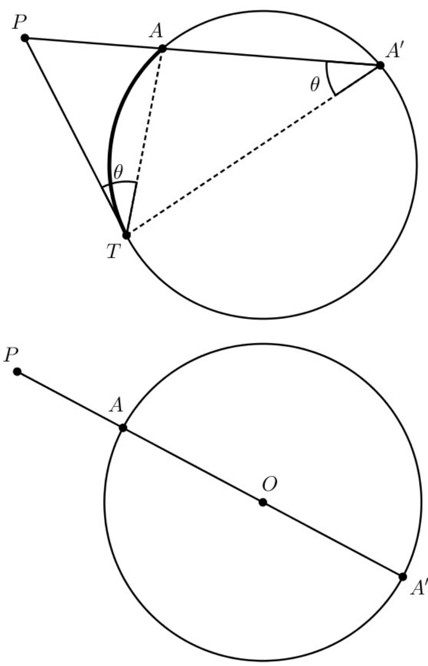

Figura 4: os caso em que a reta é tangente ao círculo (acima) e contém um diâmetro do círculo (abaixo).

Sejam $d = d(P, O)$ a distância do ponto P ao centro O do círculo C e r o raio de C. No caso em que AA' é um diâmetro do círculo C (Figura 4, abaixo), temos

$$PA \cdot PA' = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2. \qquad (9)$$

Uma vez que a potência de um ponto P em relação a um círculo C depende apenas de P e de C, podemos usar a notação $\mathrm{Pot}(P, C)$ para denotá-la. Em particular,

$$\mathrm{Pot}(P, C) = d^2 - r^2. \qquad (10)$$

A análise do sinal de $\mathrm{Pot}(P, C)$ pode ser refeita aqui: P é exterior ao disco delimitado por C se, e somente se, $d > r$, se e somente se $\mathrm{Pot}(P, C) = d^2 - r^2 > 0$. Da mesma forma, P é interior ao disco delimitado por C se, e somente se, $\mathrm{Pot}(P, C) < 0$ e $P \in C$ se, e somente se, $\mathrm{Pot}(P, C) = 0$.

Voltando às coordenadas, se $P = (x, y)$ e $O = (x_0, y_0)$, então a distância $d = d(P, O)$, é dada por $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, logo, a potência de P em relação a C é dada por

$$\mathrm{Pot}(P, C) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2. \qquad (11)$$

Vamos usar a relação acima para obter um resultado interessante.

Teorema 6. *O conjunto de todos os pontos do plano que têm a mesma potência em relação a dois círculos não concêntricos é uma reta perpendicular à reta que passa pelos centros dos círculos. Essa reta é chamada de* **eixo radical**[1] **dos dois círculos**

Prova. Sejam C_0 e C_1 os dois círculos não concêntricos, com equações respectivamente iguais a $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_0^2$ e $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$. Se $P = (x, y)$, então

$$\mathrm{Pot}(P, C_0) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_0^2$$

e

$$\mathrm{Pot}(P, C_1) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2.$$

A hipótese do teorema nos diz que $\mathrm{Pot}(P, C_0) = \mathrm{Pot}(P, C_1)$, ou seja,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_0^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2$$

Desenvolvendo os quadrados e cancelando os termos comuns, obtemos

$$-2x_0x - 2y_0y + \overbrace{x_0^2 + y_0^2 - r_0^2}^{=c_0} = -2x_1x - 2y_1y + \overbrace{x_1^2 + y_1^2 - r_1^2}^{=c_1}$$

ou, ainda,

$$2(x_1 - x_0)x + 2(y_1 - y_0)y = c_1 - c_0 \qquad (12)$$

Agora, como os círculos não são concêntricos, temos $x_0 \neq x_1$ ou $y_0 \neq y_1$, de forma que (12) representa uma reta r. A partir daqui, consideremos dois casos separadamente:

(i) $y_0 = y_1$: os centros dos dois círculos estão numa mesma reta horizontal e (12) se resume a $x = \frac{c_1 - c_0}{2(x_1 - x_0)}$, que é a equação de uma reta vertical. Então, nesse caso o eixo radical é perpendicular à reta que une os centros dos círculos.

[1] A palavra *radical*, nesse contexto, firmou-se pelo uso, mas provém de uma tradução errada do Inglês, onde *radical* significa, nesse contexto, *raízes*. Assim, o mais correto seria chamarmos a reta-objeto desse teorema de **eixo de raízes** dos dois círculos.

(ii) $y_0 \neq y_1$: os centros dos dois círculos não estão numa mesma reta horizontal e r tem coeficiente angular

$$m_r = \frac{x_0 - x_1}{y_1 - y_0}.$$

Por outro lado, a reta que passa pelos centros (x_0, y_0) e (x_1, y_1) dos círculos C_0 e C_1, tem coeficiente angular $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Como o produto desses coeficientes angulares é

$$m \cdot m_r = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x_0 - x_1}{y_1 - y_0} = -1,$$

temos que a reta r é perpendicular à reta que passa pelos centros dos dois círculos.

Reciprocamente, se $P = (x, y)$ é um ponto sobre a reta r, cuja equação é (12), somando $x^2 + y^2$ a ambos os membros reobtemos a igualdade

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_0^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2.$$

Mas, por definição, a validade dessa igualdade significa que as potências de P em relação a C_0 e C_1 são iguais. $\square$

No caso em que os círculos C_0 e C_1 se intersectam em pontos distintos A e A', temos $\mathrm{Pot}(A, C_0) = 0 = \mathrm{Pot}(A, C_1)$ e $\mathrm{Pot}(A', C_0) = 0 = \mathrm{Pot}(A', C_1)$. Logo, A e A' pertencem ao eixo radical r e, como são pontos distintos, r é a reta que passa por A e por A'.

Se os dois círculos C_0 e C_1 são tangentes, então o eixo radical, sendo perpendicular à reta que passa pelos centros dos dois círculos, coincide com a reta tangente comum aos dois círculos (uma vez que o ponto de tangência dos dois círculos, por ter potência 0 em relação a ambos, deve pertencer ao eixo radical).

Exemplo 7. *Encontre o lugar geométrico dos pontos a partir dos quais podemos traçar segmentos tangentes iguais a dois círculos não concêntricos dados.*

Solução. Se PT_1 e PT_2 são segmentos tangentes aos círculos não concêntricos dados C_1 e C_2, então a condição $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$ implica que $\mathrm{Pot}(P, C_1) = \overline{PT_1}^2 = \overline{PT_2}^2 = \mathrm{Pot}(P, C_2)$. Reciprocamente, se P é exterior aos discos delimitados por C_1 e C_2 e tem a mesma potência em relação a ambos, então $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$. Isso significa que o lugar geométrico, isto é, o conjunto formado por todos os pontos que satisfazem a condição $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$, é a porção do eixo radical dos dois círculos que é exterior a ambos. $\square$

Exemplo 8. *Quando a distância entre os centros de dois círculos é maior do que a soma dos seus raios, existem quatro tangentes T_1V_1, T_2V_2, T_3V_3 e T_4V_4, comuns aos dois círculos. Tais tangentes encontram-se mostradas na Figura 5. Prove que os pontos médios M_1, M_2, M_3 e M_4 dos segmentos T_1V_1, T_2V_2, T_3V_3 e T_4V_4 são pontos colineares.*

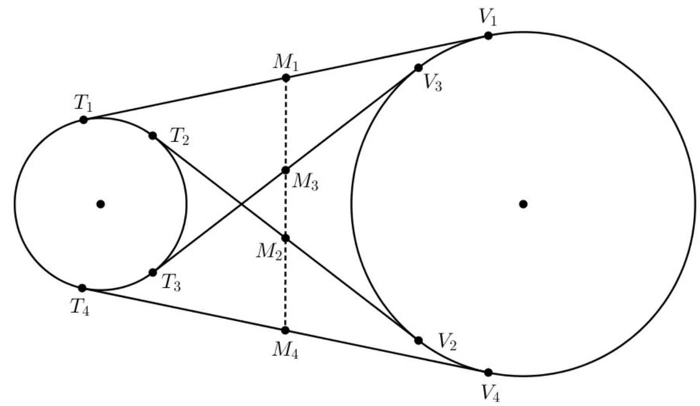

Figura 5: dois círculos com quatro tangentes comuns. Os pontos médios M_1, M_2, M_3 e M_4 são colineares.

Solução. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a distância do ponto M_i aos dois pontos de tangência T_i e V_i é a mesma. De acordo com o Exemplo 7, esses quatro pontos M_1, M_2, M_3 e M_4 pertencem ao eixo radical dos dois círculos. Logo, esses quatro pontos são colinerares. $\square$

Exemplo 9. *Sejam C_1, C_2 e C_3 três círculos cujos centros não são colineares. Prove que existe um único ponto cuja potência em relação aos três círculos é a mesma. Esse ponto é chamado* **centro radical** *dos três círculos.*

Solução. Sejam r_{12} e r_{13} os eixos radicais relativos aos círculos C_1 e C_2, e C_1 e C_3, respectivamente (faça uma figura para acompanhar o argumento a seguir).

Como os centros dos círculos não são colineares, as retas r_{12} e r_{13} não são paralelas; logo, intersectam-se em um ponto P. Agora, temos:

$$P \in r_{12} \Rightarrow \mathrm{Pot}(P, C_1) = \mathrm{Pot}(P, C_2)$$

e

$$P \in r_{13} \Rightarrow \mathrm{Pot}(P, C_1) = \mathrm{Pot}(P, C_3).$$

A partir das duas igualdades acima, concluímos que $\mathrm{Pot}(P, C_2) = \mathrm{Pot}(P, C_3)$. Assim sendo, P deve pertencer ao eixo radical r_{23} dos círculos C_2 e C_3. O ponto P tem, portanto, a mesma potência em relação aos três círculos. $\square$

Para muito mais sobre o material desta seção, veja a referência [2].

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

Você deve enfatizar o método de completamento de quadrados, usado no Exemplo 4. As condições para que uma equação polinomial de segundo grau em x e y como (3) represente um círculo podem ser usadas como no Exemplo 5 mas é interessante que, em sala, você sempre resolva exercícios similares pelo método do completamento de quadrados, a fim de que os estudantes o assimilem.

O uso das equações de círculos nos fornece uma demonstração direta do Teorema 6. Você pode tentar pensar, junto com seus alunos, em uma demonstração desse teorema que não use coordenadas (veja a sugestão de leitura complementar [2], p. 216).

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 2. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.