Material Teórico - Módulo Métodos de Contagem e Probabilidade

Alguns Problemas de Probabilidade

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Maio de 2024

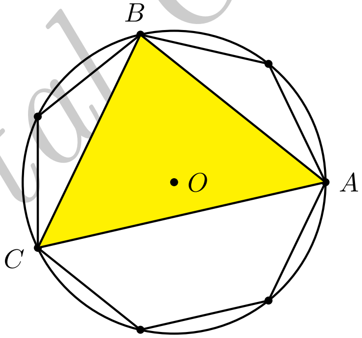
Portal da Matemática
OBMEP

Este material complementa a discussão sobre probabilidade da apostila do PIC, discutindo alguns problemas mais difíceis e interessantes. Dentre tais problemas, alguns motivarão a discussão, ainda que informal, do conceito de *probabilidade contínua.*

Exemplo 1. *Escolhemos ao acaso três dos vértices de um heptágono regular. Calcule, com justificativa, a probabilidade de que o centro do heptágono esteja contido no interior do triângulo formado pelos vértices escolhidos.*

Solução. Fixado um vértice A do heptágono, há $\binom{6}{2} = 15$ modos de escolher outros dois vértices, B e C.

Por outro lado, sendo O o centro do heptágono, as possibilidades tais que O pertence ao interior de ABC são aquelas em que B e C estão em semiplanos distintos em relação à semirreta AO e $B\widehat{A}C = \frac{2\pi}{7}$ (uma possibilidade), $\frac{4\pi}{7}$ (duas possibilidades) ou $\frac{6\pi}{7}$ (três possibilidades). A figura a seguir ilustra uma das possibilidades com $B\widehat{A}C = \frac{4\pi}{7}$; antes de prosseguir, certifique-se de que consegue esboçar as demais.



Portanto, a probabilidade pedida vale

$$\frac{1+2+3}{15} = \frac{2}{5}.$$

$\square$

Exemplo 2. *Cada cartela de uma coleção é formada por seis quadrados coloridos, justapostos como na figura abaixo:*

Em cada cartela, dois quadrados são coloridos de azul, dois de verde e dois de rosa. Nessas condições, a coleção apresenta todas as possibilidades de distribuição das cores nas cartelas e não existem cartelas com uma mesma distribuição de cores. Retirando-se, ao acaso, uma cartela da coleção, calcule a probabilidade de que apenas uma das colunas apresente quadros de mesma cor.

Solução. Primeiramente, vamos contar quantos são os cartões. Isso pode ser feito calculando quantas são as permutações de 6 elementos (cada cartela por ser identificada por uma sequência de seis cores) com elementos repetidos (2 azuis, 2 verdes e 2 rosas). O resultado é

$$P^{6}_{2,2,2} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90.$$

(Um outra possibilidade é utilizar combinações: escolhemos duas posições das 6 para a cor azul, outras duas posições para a cor verde e as demais serão automaticamente rosas. Novamente, o resultado é $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 15 \cdot 6 = 90$.)

Resta contar quantos cartões possuem *exatamente* uma coluna com duas cores iguais. Para tanto, começamos escolhendo qual coluna terá duas cores iguais, depois escolhemos qual será essa cor, o que nos dá $3 \cdot 3 = 9$ possibilidades. Por fim, devemos organizar as duas cores que sobraram nas 2 colunas que sobraram, sem que haja duas cores iguais numa mesma coluna. Isso pode ser feito de 4 maneiras possíveis (abaixo x e y representam as duas cores que sobraram):

x	x
y	y

x	y
y	x

y	y
x	x

y	x
x	y

.

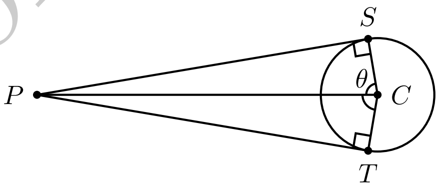
Então, o total de cartões que satisfazem as restrições do enunciado é $9 \cdot 4 = 36$ e a probabilidade desejada é

$$\frac{36}{90} = \frac{4}{10} = 40\%.$$

$\square$

Problema 3. *Em um parque de diversões, o brinquedo preferido pelas crianças mais novas é o carrossel, o qual tem o formato de um cilindro de $3m$ de altura e $3m$ de raio. Quando em funcionamento, o carrossel gira com velocidade angular constante, com as crianças sentadas nos cavalinhos fixados ao longo do círculo externo que forma a base desse cilindro. Um pai deixou sua filha de quatro anos no carrossel e foi comprar um refrigerante numa barraca situada a cerca de $15m$ de distância do carrossel. Felizmente, a região entre o carrossel e a barraca é a praça central do parque e havia pouco movimento, de sorte que ele podia olhar a filha à distância, sempre que o cavalinho em que ela se encontrava estivesse visível a partir de sua posição. Após pagar o refrigerante, o pai olhou na direção do carrossel. Calcule, com justificativa, a probabilidade de que, ao fazê-lo, ele tenha avistado a filha.*

Solução. Sejam P a posição do pai, C o centro do carrossel e PS e PT as tangentes traçadas de P ao círculo externo do carrossel.



Então, $S\widehat{C}P = T\widehat{C}P = \theta$, com

$$\cos\theta = \frac{CS}{CP} = \frac{3}{15+3} = \frac{1}{6}.$$

Como a velocidade angular do carrossel é constante, a probabilidade dele ter avistado a filha é a razão entre o ângulo 2θ (em radianos) subentendido pelo do arco visível $\widehat{ST}$ e 2π (correspondente a uma volta completa do carrossel):

$$\frac{\cancel{2}\theta}{\cancel{2}\pi} = \frac{1}{\pi}\,\text{arccos}\,\frac{1}{6} \cong \frac{1,403}{3,141} \cong 0,446.$$

$\square$

O próximo exemplo mostra como usar o cálculo de probabilidades para resolver um problema envolvendo desigualdades com números reais.

Exemplo 4. *Sejam p e q reais positivos e com soma 1, e m e n inteiros positivos. Prove que*

$$(1-p^m)^n + (1-q^n)^m \geq 1.$$

Prova. Em cada casa de uma tabela $m \times n$ escreva, aleatoriamente, 0 ou 1, com probabilidade p para 0 e q para 1.

Considere o evento A, de haver pelo menos um 1 em cada coluna. Como a probabilidade de que uma certa coluna só contenha 0 é p^m, a probabilidade de que ela contenha pelo menos um 1 é $1-p^m$. Portanto, a probabilidade de que cada coluna contenha pelo menos um 1 é

$$P(A) = (1-p^m)^n.$$

Considere, agora, o evento B, de haver pelo menos um 0 em cada linha. Por um raciocínio análogo ao do parágrafo anterior (trocando colunas por linhas), temos

$$P(B) = (1-q^n)^m.$$

Note que A ou B sempre ocorre (podendo ocorrer ambos A e B). Realmente, se uma coluna não tiver 1, então todas as linhas têm pelo menos um 0; por outro lado, se uma linha não tiver 0, então todas as colunas têm pelo menos um 1.

Portanto,

$$\begin{aligned}1 &= P(A \cup B)\\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B)\\ &\leq P(A) + P(B).\end{aligned}$$

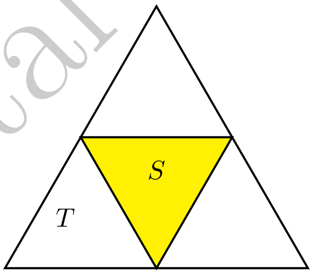
Mas $P(A) + P(B) \geq 1$ é precisamente a desigualdade do enunciado. $\square$

Exemplo 5. *Um triângulo é desenhado aleatoriamente. Qual a probabilidade de que ele seja acutângulo?*

Solução. Em relação a um sistema cartesiano de coordenadas $Oxyz$ no espaço, o conjunto dos pontos (x, y, z) tais que $x, y, z > 0$ e $x + y + z = \pi$ forma o interior do triângulo T de vértices $(\pi, 0, 0)$, $(0, \pi, 0)$ e $(0, 0, \pi)$.

Cada ponto (α, β, γ) desse conjunto corresponde a uma classe de semelhança de triângulos, qual seja, todos aqueles com ângulos internos (medidos em radianos) α, β e γ.

Agora, um triângulo de ângulos α, β e γ será acutângulo se, e só se, $\alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$. Em relação a T, tais restrições equivalem a que o ponto (α, β, γ) pertença ao interior de seu triângulo medial S (veja a figura a seguir)



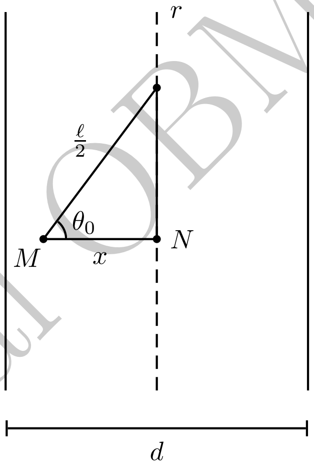
Assim, queremos calcular a probabilidade de que, escolhido aleatoriamente um ponto (α, β, γ) em T, ele esteja, de fato, em S. Tal probabilidade vale

$$\frac{A(S)}{A(T)} = \frac{1}{4}.$$

$\square$

Exemplo 6 (da agulha de Buffon). *O piso de uma sala é composto por tábuas corridas paralelas, cada uma de largura d. Uma agulha de comprimento ℓ, com $\ell \leq d$, cai acidentalmente sobre o piso. Qual a probabilidade de que sua posição de repouso toque a linha divisória entre duas tábuas?*

Solução. Independentemente de qual seja a posição da agulha no chão, seu ponto médio M estará situado em uma faixa de largura d, centrada na linha divisória r entre duas tábuas consecutivas; assim, r é a linha divisória mais próxima de M.



Sendo N o pé da perpendicular baixada de M a r e $MN = x$, tem-se $0 \leq x \leq \frac{d}{2}$. Por outro lado, se θ é o ângulo entre $\overrightarrow{MN}$ e a agulha, medido trigonometricamente (em relação a $\overrightarrow{MN}$), temos $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

A fim de que a agulha toque a linha divisória r, é necessário que $0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}$. Além disso, devemos ter $|\theta| \leq \theta_0$, em que θ_0 é ângulo mostrado na figura acima.

Como $\cos\theta_0 = \frac{2x}{\ell}$ e a função $\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ é estritamente decrescente, devemos ter $|\theta| \le \theta(x)$, em que

$$\theta(x) = \arccos\frac{2x}{\ell}.$$

Reciprocamente, é imediato verificar que se $0 \le x \le \frac{\ell}{2}$ e $|\theta| \le \theta(x)$, então a agulha centrada em um ponto M situado à distância x de r e inclinada (trigonometricamente) do ângulo θ em relação a $\overrightarrow{MN}$ intersectará a linha divisória r.

Portanto, dentre os pontos (x, θ) tais que $0 \le x \le \frac{d}{2}$ e $|\theta| \le \frac{\pi}{2}\}$, queremos aqueles em que $0 \le x \le \frac{\ell}{2}$ e $|\theta| \le \theta(x)\}$.

Se $\mathcal{R} = \{(x,\theta);\ \text{e } 0 \le x \le \frac{d}{2},\ |\theta| \le \frac{\pi}{2}\}$ e $\mathcal{F} = \{(x,\theta);\ \text{e } 0 \le x \le \frac{\ell}{2},\ |\theta| \le \theta(x)\}$, a probabilidade que desejamos calcular é

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Área}(\mathcal{F})}{\text{Área}(\mathcal{R})} &= \frac{2}{d\pi}\cdot 2\int_0^{\ell/2} \arccos\frac{2x}{\ell}\,dx \\
&= \frac{4}{d\pi}\int_0^1 \arccos y \cdot \frac{\ell}{2}\,dy \\
&= \frac{2\ell}{d\pi}\int_0^1 \arccos y\,dy.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\int \arccos y\,dy &= y\arccos y + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \\
&= y\arccos y - \sqrt{1-y^2},
\end{aligned}$$

temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$P(A) = \frac{2\ell}{d\pi}\left(y\arccos y - \sqrt{1-y^2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{2\ell}{d\pi}.$$

$\square$

O último exemplo que apresentamos é igualmente desafiador e interessante. O canal Veritasium do YouTube gravou um vídeo instigante sobre ele, o qual pode ser encontrado em `https://www.youtube.com/watch?v=iSNsgj1OCLA`

Exemplo 7. *Em um auditório há cem pessoas, numeradas de* 1 *a* 100*. Em uma sala contígua ao auditório há cem caixas fechadas, numeradas de* 1 *a* 100 *e cada uma contendo um cartão, no qual um número de* 1 *a* 100 *está escrito. Sabe-se que cada caixa contém exatamente um cartão e cada número de* 1 *a* 100 *aparece em um cartão. O seguinte jogo é, então, proposto às pessoas do auditório: uma pessoa por vez vai à sala das caixas, abre aleatoriamente cinquenta delas e lê os números escritos nos cartões que contêm; em seguida, ela fecha as caixas e se dirige a uma terceira sala, sem travar contato com as pessoas que ainda estão no auditório. Se um desses cinquenta números que a pessoa viu coincidir com seu próprio número, ela terá ganho; do contrário, ela terá perdido. Após as cem pessoas jogarem, se todas tiverem ganho, dividirão entre si um prêmio milionário; do contrário, sairão do jogo sem nada. Admita que, antes de começarem a se dirigir à sala das caixas, as cem pessoas tiveram tempo suficiente para conversar entre si no auditório e traçar uma estratégia comum de abertura das caixas, a fim de maximizar a chance de dividirem o prêmio. Exiba uma tal estratégia que dê, às pessoas, pelo menos* 30% *de chance de ganharem.*

Solução. Suponha que as pessoas executem a seguinte estratégia: em sua vez, a pessoa de número $k := a_1$ abre a caixa de número a_1 e observa o número a_2 escrito no cartão nela contido. Se $a_2 = k$, a pessoa ganhou; senão, ela abre a caixa de número a_2 e observa o número a_3 escrito no cartão nela contido. Se $a_3 = k$, a pessoa ganhou; senão, ela abre a caixa de número a_3 e observa o número a_4 escrito no cartão nela contido, etc.

Prosseguindo dessa maneira, a pessoa ganhará se $a_j = k$ para algum $1 \leq j \leq 50$; nesse caso, observe que o algoritmo acima descrito orienta a pessoa a dirigir-se à caixa de número $k = a_1$. Por outro lado, se $a_j \neq k$ para todo $1 \leq j \leq 50$, a pessoa perderia.

De outra forma, considere a permutação σ do conjunto $\{1, 2, \ldots, 100\}$, tal que $\sigma(i) = j$ sempre que o cartão da caixa de número i contiver o número j. Então, ao executar o algoritmo acima, a pessoa k ganhará se, e só se, k pertencer a um ciclo em σ de tamanho no máximo 50. Portanto, todas as pessoas ganharão se, e só se, σ não contiver ciclos de tamanho l, com $51 \leq l \leq 100$.

Considere o espaço de probabilidades $(\mathcal{S}, \mathcal{B}, P)$, em que $\mathcal{S}$ é o conjunto das permutações σ de $\{1, 2, \ldots, 100\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathcal{S})$ é o conjunto das partes de S e P é a probabilidade na qual todas as σ são equiprováveis (de sorte que, para $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$, tenhamos $P(\mathcal{A}) = \frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{S}|}$).

Para $51 \leq l \leq 100$, seja $\mathcal{A}_l$ o evento formado pelas permutações σ que contêm pelo menos um ciclo de tamanho l. Se $\mathcal{A}^c := \mathcal{A}_{51} \cup \mathcal{A}_{52} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{100}$, queremos mostrar que $P(\mathcal{A}) > 0,3$.

<u>Afirmação</u>: para $l \in \{51, 52, \ldots, 100\}$, tem-se $P(\mathcal{A}_l) \leq \frac{1}{l}$.

Uma vez que a próxima caixa é determinada pelo número escrito no cartão da caixa atual, para $l \geq 51$ cada $\sigma \in \mathcal{A}_l$ tem no máximo um ciclo de comprimento l. Há exatamente $\binom{100}{l}$ maneiras de selecionar os números das caixas que formarão o ciclo de comprimento l. Então, o total de ciclos de comprimento l distintos que podemos formar com tais números é uma permutação circular deles, ou seja, $(l-1)!$. Além disso, uma permutação qualquer dos números das demais caixas (e há $(100-l)!$ delas) completa σ. Portanto, o número de permutações em $\mathcal{A}_l$ é igual a

$$\binom{100}{l} \cdot (l-1)! \cdot (100-l)! = \frac{100!}{l},$$

de sorte que

$$P(\mathcal{A}_l) = \frac{|\mathcal{A}_l|}{|\mathcal{S}|} = \frac{100!/l}{100!} = \frac{1}{l}.$$

Graças à afirmação anterior, e levando em conta que $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{A}_j$ são disjuntos para todos $i, j \geq 51$ distintos, podemos calcular

$$
\begin{aligned}
P(\mathcal{A}) &= 1 - P(\mathcal{A}^c)\\
&= 1 - P(\mathcal{A}_{51} \cup \mathcal{A}_{52} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{100})\\
&= 1 - \big(P(\mathcal{A}_{51}) + P(\mathcal{A}_{52}) + \ldots + P(\mathcal{A}_{100})\big)\\
&= 1 - \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}\right).
\end{aligned}
$$

Como queremos mostrar que $P(\mathcal{A}) > 0,3$, resta provar que $\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100} < 0,7$. Mas

$$
\sum_{l=51}^{100} \frac{1}{l} < \int_{50}^{100} \frac{1}{x}\, dx = \log 2 \cong 0,693 < 0,7,
$$

como é fácil verificar com a ajuda de uma calculadora. □

Dicas para o Professor

Os quatro exemplos iniciais podem ser apresentados a alunos já bem versados em probabilidade ao longo de uma ou duas sessões de 50 minutos.

Os três últimos exemplos são mais desafiadores, requerendo o uso de conteúdos além do Ensino Médio usual. No entanto, achamos interessante comentá-los exatamente pelo fato de utlizarem temas diversos de Probabilidade. Especialmente os dois últimos exemplos mostram como o Cálculo é uma ferramenta poderosa em Matemática.

O belíssimo livro [1] contém mais exemplos interessantes envolvendo o cálculo de probabilidades.

Sugestões de Leitura Complementar

1. *Fifty Challenging Problems in Probability, with Solutions.* F. Mosteller. Dover, Mineola, 1965.