Material Teórico - Módulo Números Naturais: Representação, Operações e Divisibilidade

Múltiplos e Divisores - Parte 2

Tópicos Adicionais

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

30 de outubro de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, continuamos apresentando algumas propriedades e exemplos que envolvem múltiplos e divisores de números naturais.

Exemplo 1. *Numa escola, ao longo de um corredor comprido, estão enfileirados* 30 *armários, numerados de* 1 *a* 30*, com suas portas fechadas. Trinta alunos da escola, também numerados de* 1 *a* 30*, resolvem fazer a seguinte brincadeira: o aluno nº* 1 *passa pelo corredor e abre todos os armários; em seguida, o aluno nº* 2 *passa e fecha todos os armários de número par; depois passa o aluno nº* 3 *e inverte a posição das portas de todos os armários múltiplos de* 3*, isto é, ele os fecha se estiverem abertos e os abre se estiverem fechados; depois, é a vez do aluno nº* 4*, que inverte a posição das portas dos armários múltiplos de* 4*, e assim por diante, até o* 30ž *aluno. Após a passagem dos* 30 *alunos, quais armários estarão abertos?*

Solução. Observe que os divisores de um número natural diferente de zero ocorrem aos pares, a não ser que esse número seja um quadrado perfeito. Como exemplo, vamos analisar inicialmente a quantidade de divisores positivos do número 24. Denotemos por $D(24)$ o conjunto formado por esses divisores. Assim, temos

$$D(24) = \{1,24,2,12,3,8,4,6\}.$$

Veja que, se d é um divisor positivo de 24, então $\frac{24}{d}$ também é divisor positivo de 24. Assim, como não existe d divisor positivo de 24 tal que $d = \frac{24}{d}$ – pois isso acarretaria $d^2 = 24$, o que não ocorre, pois 24 não é quadrado perfeito – 24 possui uma quantidade par de divisores. O mesmo argumento pode ser utilizado para mostrar que um inteiro positivo qualquer que não é quadrado perfeito possui uma quantidade par de dividores.

Por outro lado, quando escrevemos os divisores de 16, por exemplo, obtemos

$$D(16) = \{1,16,2,8,4\}.$$

Veja que não foi possível formar o par $\{d,16/d\}$ para $d = 4$. Isso ocorreu porque $\frac{16}{4} = 4$, ou seja, $16 = 4^2$. De fato, esse argumento pode ser estendido para mostrar que qualquer quadrado perfeito possui uma quantidade ímpar de divisores.

Voltando ao problema, vejamos o que acontece com o armário 24. Ele está inicialmente fechado, o aluno 1 passa e o abre, o aluno 2 o fecha, o aluno 3 o abre novemente, o 4 o fecha, o aluno 6 o abre, o 8 o fecha, o 12 o abre e o 24 o fecha. De fato, qualquer armário cuja numeração possua uma quantidade par de divisores estará fechado no final. Por outro lado, qualquer armário cuja numeração possua um número ímpar de divisores positivos estará aberto no final. Assim, os armários que estarão abertos no final são os de número 1, 4, 9, 16 e 25. $\square$

Exemplo 2. *Mostre que se a e b são números inteiros positivos tais que $a < b$, então* $\operatorname{mdc}(a,b) = \operatorname{mdc}(a,b-a)$.

Solução. Seja d um divisor comum a a e b. Então existem q_1 e q_2 inteiros tais que $a = dq_1$ e $b = dq_2$. Logo, $b - a = dq_2 - dq_1 = d(q_2 - q_1) = dq$, em que $q = q_2 - q_1 \in \mathbb{Z}$. Logo, d é divisor comum a a e $b - a$.

Por outro lado, se d' é um divisor comum a a e $b - a$, então existem k_1 e k_2 inteiros tais que $a = d'k_1$ e $b-a = d'k_2$. Assim, $b = (b - a) + a = d'k_2 + d'k_1 = d'(k_1 + k_2) = d'k$, em que $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$. Com isso, mostramos que

$$d|a \text{ e } d|b \iff d|a \text{ e } d|(b-a).$$

Logo, $\operatorname{mdc}(a,b) = \operatorname{mdc}(a,b-a)$. $\square$

Exemplo 3. *Calcule* $\operatorname{mdc}(12,64)$.

Solução. Utilizando o resultado provado no exemplo anterior, obtemos

$$\operatorname{mdc}(12,64) = \operatorname{mdc}(12,64-12) = \operatorname{mdc}(12,52).$$

Aplicando sucessivas vezes o mesmo resultado, obtemos

$$\operatorname{mdc}(12,52) = \operatorname{mdc}(12,52-12) = \operatorname{mdc}(12,40),$$

$$\operatorname{mdc}(12{,}40) = \operatorname{mdc}(12{,}40-12) = \operatorname{mdc}(12{,}28),$$

$$\operatorname{mdc}(12{,}28) = \operatorname{mdc}(12{,}28-12) = \operatorname{mdc}(12{,}16)$$

e, finalmente,

$$\operatorname{mdc}(12{,}16) = \operatorname{mdc}(12{,}16-12) = \operatorname{mdc}(12{,}4) = 4.$$

Assim, $\operatorname{mdc}(12{,}64) = 4$. □

Observação 4. *Observando com calma o exemplo anterior, notamos que* $\operatorname{mdc}(12{,}64) = \operatorname{mdc}(12{,}64-5\cdot 12)$. *Mas* $64-5\cdot 12$ *é o resto da divisão de* 64 *por* 12. *O mesmo argumento pode ser utilizado para mostrar que se* a *e* b *são números inteiros positivos tais que* $a = bq + r$, *em que* $0 \le r < b$, *então* $\operatorname{mdc}(a{,}b) = \operatorname{mdc}(b{,}r)$. *Esse procedimento é a base do método das divisões sucessivas para o cálculo do* mdc. *De fato, podemos continuar com as divisões – o resto em uma determinada divisão será o divisor na divisão seguinte e o divisor em uma determinada divisão será o dividendo na seguinte – até que o resto seja igual a zero. Assim, o último divisor será o* $\operatorname{mdc}(a{,}b)$.

Exemplo 5. *Utilizando o método das divisões sucessivas, calcule* $\operatorname{mdc}(100{,}36)$.

Solução. Temos que

$$\begin{array}{r|l} 100 & 36 \\ \cline{2-2} 28 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 28 \\ \cline{2-2} 8 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 28 & 8 \\ \cline{2-2} 4 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

Logo,

$$\operatorname{mdc}(100{,}36) = \operatorname{mdc}(36{,}28) = \operatorname{mdc}(28{,}8) = \operatorname{mdc}(8{,}4) = 4.$$

□

Exemplo 6. *Mosre que há infinitos números primos.*

Solução. Por contradição, suponha que a quantidade de números primos seja finita. Vamos denotar o conjunto formado pelos números primos por $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$. Agora, considere o número inteiro dado por $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Como p é composto, pois $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 > p_i, \forall i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, existe algum primo p_k tal que $p_k|p$. Mas veja que $p_k \in \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$, logo, $p_k|p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$. Portanto, $p_k|[p - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n]$, ou seja, $p_k|1$, o que é um absurdo. Logo, há infinitos números primos. $\square$

Exemplo 7. *Encontre todos os números primos menores que 100.*

Solução. Um resultado conhecido é o de que se um número inteiro $n > 1$ não é divisível por nenhum primo menor ou igual a $\sqrt{n}$, então n é primo. De fato, se n é composto e p_1 é um primo que divide n, então existe $q > 1$ inteiro tal que $n = p_1 \cdot q$. Agora, se p_2 um primo que divide q, então existe um inteiro $k \geq 1$ tal que $q = p_2 \cdot k$. Daí, $n = p_1 \cdot p_2 \cdot k \geq p_1 \cdot p_2$. Desse modo, $p_1 \leq \sqrt{n}$ ou $p_2 \leq \sqrt{n}$, pois, se ocorresse o contrário, teríamos $n \geq p_1 \cdot p_2 > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, o que é um absurdo. Agora, vamos utilizar esse resultado para encontrar todos os primos menores que 100, seguindo os seguintes passos:

1. Escrevemos todos os números menores que 100 em uma tabela 10×10.

2. Excluímos o número 1, que, como sabemos, não é primo.

3. O número 2 é o primeiro primo. Excluímos da tabela todos os demais múltiplos de 2.

4. O número 3 é o próximo primo. Excluímos da tabela todos os demais múltiplos de 3.

5. O número 5 é o próximo primo. Excluímos da tabela todos os demais múltiplos de 5.

6. O número 7 é o próximo primo. Excluímos da tabela todos os demais múltiplos de 7.

7. Pela discussão feita no parágrafo anterior, qualquer número composto menor que 100 deve ter um divisor primo menor que $\sqrt{100} = 10$, logo, depois de seguidos

todos os passos de 1 até 6, os números que restarem na tabela serão todos primos.

Observação 8. *Veja que o menor primo maior que* 7 *é* 11*, que é maior que* $\sqrt{100} = 10$*, logo, os seus múltiplos já foram excluídos da tabela, porque também são múltiplos de algum dos primos anteriores. O mesmo acontece com os outros primos maiores que* 11*.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$\square$

Exemplo 9. *O número* 419 *é primo?*

Solução. Como vimos acima, se um número natural n é composto, então deve existir um número primo p que o divide e satisfaz $p \leq \sqrt{n}$. Como $20^2 = 400 < 419 < 441 = 21^2$, obtemos $20 < \sqrt{419} < 21$. Logo, se 419 é composto, então ele deve possuir algum fator primo menor do que 20. Como podemos ver no Crivo de Eratóstenes, os primos menores do que 20 são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19. Aplicando os critérios de divisibilidade – quando forem aplicáveis – ou dividindo 419 por cada um desses primos, verificamos que 419 não é divisível por nenhum deles. Concluímos assim que 419 é um número primo. □

Sempre que dividimos um número natural sucessivamente por números primos chegamos a uma **forma fatorada** desse número. O resultado que garante que sempre encontramos a forma fatorada de um número natural dado é conhecido como Teorema Fundamental da Aritmética. Antes de apresentar o teorema, vejamos um exemplo:

Exemplo 10. *Fatore os números* 120 *e* 210.

Solução. Uma maneira simples de encontrar a forma fatorada de um número natural n consiste em fazer divisões sucessivas pelos números primos que dividem n em ordem crescente. Veja os diagramas abaixo. Assim, obtemos as

$$
\begin{array}{r|l}
120 & 2 \\
60 & 2 \\
30 & 2 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
210 & 2 \\
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 & 2 \\
 &
\end{array}
$$

formas fatoradas $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ e $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. □

Apresentamos agora o

Teorema 11 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Todo inteiro positivo* $n > 1$ *se escreve como produto de fatores primos de maneira única, a menos da ordem.*

Não faremos a demonstração desse teorema com todos os detalhes. Apresentaremos, a seguir, um argumento que ajuda a entender o porquê da existência da fatoração. Para mostrar que um número natural $n > 1$ pode ser escrito como um produto de fatores primos, repetimos a ideia utilizada acima para os números 120 e 210.

i. Se n for primo, então já está fatorado. Caso contrário, escolha o menor primo p que divide n e escreva $n = p \cdot m$.

ii. Se m também for primo, então n está fatorado. Caso contrário, repita o processo acima, trocando n por m.

De modo geral, o teorema fundamental da aritmética nos diz que qualquer número natural $n > 1$ pode ser escrito na forma $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, com p_1, p_2,…,p_k primos distintos e a_1, a_2,…,a_n inteiros positivos; tal maneira de escrever n é sua forma fatorada.

A partir da forma fatorada de n, o teorema fundamental também permite verificar que todos os divisores positivos de n são da forma $p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{b_k}$, em que $0 \leq b_1 \leq a_1$, $0 \leq b_2 \leq a_2$, …, $0 \leq b_k \leq a_k$. Logo, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, concluímos que a quantidade de divisores positivos de n é

$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1),$$

pois $b_1 \in \{0,1,\ldots,a_1\}$, $b_2 \in \{0,1,\ldots,a_2\}$, …, $b_k \in \{0,1,\ldots,a_k\}$, ou seja, b_1 pode ser escolhido de $a_1 + 1$ modos, b_2 pode ser escolhido de $a_2 + 1$ modos, e assim por diante, até b_k, que pode ser escolhido de $a_k + 1$ modos.

Exemplo 12. *Encontre as quantidades de divisores positivos dos números listados abaixo.*

(*a*) 144.

(*b*) 500.

(*c*) 99.

(*d*) 273.

Solução. Fatorando esses números, obtemos

144	2	500	2	99	3	273	3
72	2	250	2	33	3	91	7
36	2	125	5	11	11	13	13
18	2	25	5	1		1	
9	3	5	5				
3	3	1					
1							

Portanto, temos

(a) $144 = 2^4 \cdot 3^2$, logo, 144 possui $(4+1)\cdot(2+1) = 5\cdot 3 = 15$ divisores.

(b) $500 = 2^2 \cdot 5^3$, logo, 500 possui $(2+1)\cdot(3+1) = 3\cdot 4 = 12$ divisores.

(c) $99 = 3^2 \cdot 11^1$, logo, 99 possui $(2+1)\cdot(1+1) = 3\cdot 2 = 6$ divisores.

(d) $273 = 3^1 \cdot 7^1 \cdot 13^1$, logo, 273 possui $(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$ divisores.

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. Ao falar do método das divisões sucessivas, ressalte que este é o método mais eficaz para encontrar o mdc de números naturais, principalmente se os números forem grandes, porque não é necessário encontrar primos que sejam divisores dos números. O processo de fatorar um número composto pode ser uma tarefa bem árdua, se os números primos que aparecem em sua fatoração forem grandes. Ao apresentar o Teorema Fundamental da Aritmética, fale um pouco mais sobre a ideia da unicidade da fatoração, caso os alunos tenham maturidade suficiente para compreender.

Nas referências a seguir você poderá aprofundar o conhecimento adquirido nesta aula. Nelas você pode encontrar, por exemplo, demonstrações completas do Teorema Fundamental da Aritmética.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 5*: Teoria dos Números.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. E. de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Números.* São Paulo, Nobel, 1989.