Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana Parte 2

A Desigualdade Triangular

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 A desigualdade triangular

Iniciamos esta seção com dois resultados que fornecem uma importante relação entre os comprimendos dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo.

Proposição 1. *Se ABC é um triângulo tal que $AC > AB$, então $\widehat{B} > \widehat{C}$.*

Prova. Como $AC > AB$, podemos considerar um ponto $D \in \overline{AC}$, tal que $AB = AD$ (cf. Figura 1).

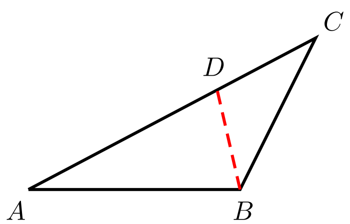

Figura 1: ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Agora, observe que

$$\widehat{B} = A\widehat{B}C > A\widehat{B}D.$$

Mas, uma vez que o triângulo ABD é isósceles, temos $A\widehat{B}D = A\widehat{D}B$. Por outro lado, como o ângulo $\angle ADB$ é um ângulo externo do triângulo BCD, temos $A\widehat{D}B > B\widehat{C}D = \widehat{C}$. Portanto, obtemos:

$$\widehat{B} = A\widehat{B}C > A\widehat{B}D = A\widehat{D}B > B\widehat{C}D = \widehat{C}.$$

$\square$

Vale a recíproca da Proposição 1. Mais precisamente, temos o resultado a seguir.

Proposição 2. *Se ABC é um triângulo tal que $\widehat{B} > \widehat{C}$, então $AC > AB$.*

Prova. Uma vez que AC e AB são números reais, temos que ocorre uma, e somente uma, das seguintes opções:

i. $AC = AB$;

ii. $AC < AB$;

iii. $AC > AB$.

Se fosse $AC = AB$, o triângulo ABC seria isósceles com base BC e, desse modo, teríamos $\widehat{B} = \widehat{C}$, o que contraria a hipótese $\widehat{B} > \widehat{C}$. Se fosse $AC < AB$, então, pela Proposição 1, deveria ocorrer $\widehat{B} < \widehat{C}$, o que também contraria a hipótese $\widehat{B} > \widehat{C}$. Portanto, a única possibilidade é termos $AC > AB$. $\square$

Exemplo 3. *Em um país, certo dia, um avião partiu de cada cidade com destino à cidade mais próxima. Se as distâncias entre as cidades são duas a duas distintas, prove que em nenhuma cidade aterrissaram mais de cinco aviões.*

Prova. Seja A uma cidade qualquer desse país.

Afimamos inicialmente que, se em A aterrissaram aviões partindo de outras duas cidades B e C, então, considerando o triângulo ABC, devemos ter $B\widehat{A}C > 60^o$.

De fato, se $B\widehat{A}C \leq 60^o$, então, uma vez que a soma dos ângulos de todo triângulo é $180°$, concluímos que pelo menos um dos outros dois ângulos internos do triângulo ABC seria maior do que 60^o. Desse modo, pela Proposição 2, uma das duas possibilidades a seguir ocorreria:

(i) $BC < AB$ (caso $A\widehat{C}B > 60° \geq B\widehat{A}C$);
(ii) $BC < AC$ (caso $A\widehat{B}C > 60° \geq B\widehat{A}C$).

Entretanto, uma qualquer das possibilidades acima contradiria o fato de A ser a cidade mais próxima de B e de C, de sorte que deve ser $B\widehat{A}C > 60°$.

Agora, suponha que chegassem seis aviões em A, com origens nas cidades B, C, D, E, F e G. (Veja a Figura 2.)

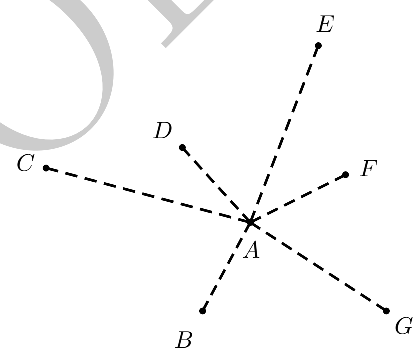

Figura 2: os aviões que chegam em A.

Então, por um lado teríamos

$$360^o = B\widehat{A}C + C\widehat{A}D + D\widehat{A}E + E\widehat{A}F + F\widehat{A}G + G\widehat{A}G,$$

de sorte que pelo menos um desses seis ângulos seria menor ou igual a 60^o. Por outro, afirmação demonstrada no início da prova fornece uma contradição, uma vez que garante que cada um desses seis ângulos deve ser maior que 60^o. $\square$

A seguir, colecionamos duas consequências importantes da Proposição 2.

Corolário 4. *Se ABC é um triângulo tal que $\widehat{A} \geq 90^o$, então $\overline{BC}$ é o seu maior lado. Em particular, a hipotenusa é o maior lado de um triângulo retângulo.*

Prova. Como $\widehat{A} \geq 90^o$ e $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$, temos que $\widehat{A} \geq 90^o > \widehat{B}$ e $\widehat{A} \geq 90^o > \widehat{C}$. Portanto, segue da Proposição 2 que $BC > AC$ e $BC > AB$. $\square$

Corolário 5. *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos tais que $AB = A'B'$ e $AC = A'C'$. Se $\widehat{A} < \widehat{A'}$, então $BC < B'C'$.*

Prova. Sejam α o semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$ e que contém o ponto B, e D o ponto de α tal que $AD = AB$ e $D\widehat{A}C = \widehat{A'}$. (Veja a Figura 3.)

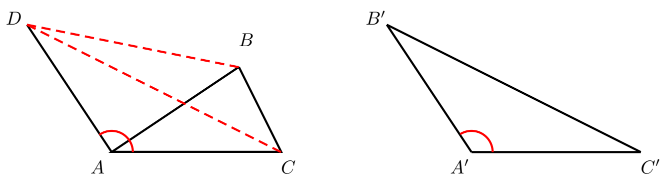

Figura 3: comparando o terceiro lado de dois triângulos.

Então os triângulos DAC e $B'A'C'$ são congruentes (pelo caso LAL). Daí, obtemos $DC = B'C'$, e resta mostrar que $DC > BC$.

Para o que falta, a Proposição 2 garante ser suficiente mostrarmos que $C\widehat{B}D > C\widehat{D}B$. Mas essa desigualdade segue de que

$$C\widehat{B}D > A\widehat{B}D = A\widehat{D}B > C\widehat{D}B.$$

(Observe que vale a igualdade $A\widehat{B}D = A\widehat{D}B$ porque o triângulo ABD é isósceles com base BD.) □

O teorema a seguir, conhecido como a **desigualdade triangular**, é o principal resultado a ser discutido nesse material.

Teorema 6. *Em todo triângulo, cada um dos lados tem comprimento menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Prova. Seja ABC um triângulo com $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que BC é o maior dos lados do triângulo, de modo que $a \geq b$ e $a \geq c$. Daí, segue imediatamente que $b < a + c$ e $c < a + b$.

Resta, pois, mostrar que $a < b + c$. Para tanto, marque o ponto D sobre a semirreta oposta à semirreta AC tal que $AD = AB = c$ (cf. Figura 4). Temos então que

$$CD = AC + AD = b + c.$$

Mas, note que o triângulo ABD é isósceles, o que acarreta $A\widehat{D}B = A\widehat{B}D$ e, portanto,

$$C\widehat{D}B = A\widehat{D}B = A\widehat{B}D < A\widehat{B}D + A\widehat{B}C = D\widehat{B}C.$$

Agora, aplicando a Proposição 2 ao triângulo BCD, temos que $a < b + c$. □

A desigualdade triangular fornece uma condição necessária e suficiente para a colinearidade de três pontos no plano. Mais precisamente, três pontos A, B e C no plano são colineares se, e somente se, uma das três opções abaixo é satisfeita:

(a) $AC = AB + BC$;

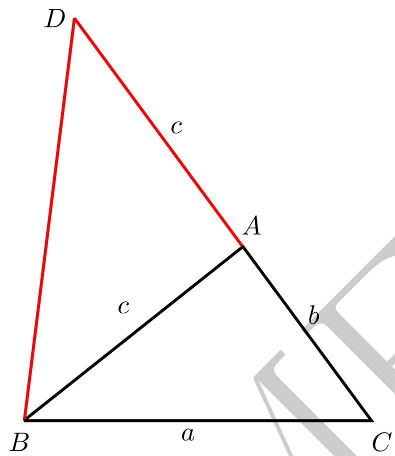

Figura 4: a desigualdade triangular.

(b) $AB = AC + CB$;

(c) $BC = BA + AC$.

Realmente, é claro que quando três pontos A, B e C no plano são colineares, ocorre uma, e somente uma das três opções acima, dependendo de qual dos três pontos dados esteja situado entre os outros dois.

Reciprocamente, se A, B e C não são colineares, então eles formam um triângulo e, neste caso, a desigualdade triangular nos diz que $AC < AB + BC$, $AB < AC + CB$ e $BC < BA + AC$.

Exemplo 7. *Calcule a quantidade de retas determinadas por quatro pontos A, B, C e D no plano, sabendo que $AB = 8$, $AC = 12$, $AD = 5$, $BC = 15$, $BD = 13$ e $CD = 14$.*

Solução. Como

$$AB + AD = 8 + 5 = 13 = BD,$$

temos que A, B e C são colineares, com A situado entre B e D. Assim, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ representam a mesma reta. Por outro lado, como

$$AB + AC = 8 + 12 = 20 > 15 = BC,$$

concluímos que $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ (veja a Figura 5).

Portanto, as retas determinadas por A, B, C e D são $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, num total de 4 retas. □

2 Algumas aplicações da desigualdade triangular

Nesta seção, colecionamos, a título de ilustração, algumas aplicações interessantes da desigualdade triangular. Para outras mais, veja as referências listadas ao final deste material teórico.

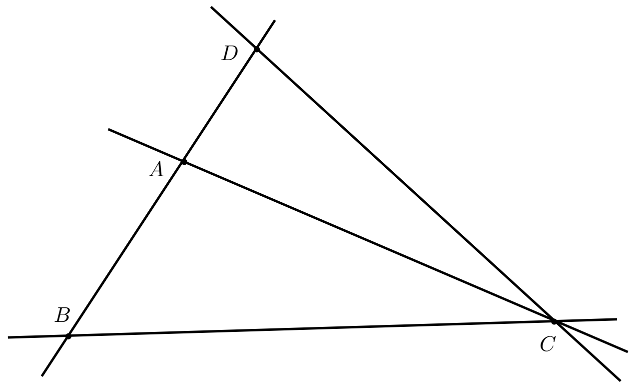

Figura 5: retas determinadas por quatro pontos, três dos quais colineares.

Exemplo 8. *Seja D um ponto interior ao triângulo ABC, conforme mostrado na Figura 6. Prove que:*

(a) $DB + DC < AB + AC$.

(b) $DA + DB + DC < AB + AC + BC$.

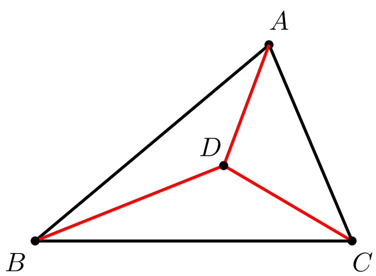

Figura 6: distância de um ponto interior aos vértices de um triângulo.

Prova. Para provar a parte (a), iniciamos com o prolongamento do segmento BD até que ele intersecte o lado AC no ponto E (cf. Figura 7).

Aplicando a desigualdade triangular aos triângulos CDE e ABE, obtemos respectivamente

$$DC < DE + EC \ \text{ e } \ BE < AB + AE.$$

Combinando as duas desigualdades acima e utilizando a desigualdade triangular, obtemos:

$$\begin{aligned} DB + DC &< DB + (DE + EC) = (BD + DE) + EC \\ &= BE + EC < (AB + AE) + EC \\ &= AB + (AE + EC) = AB + AC. \end{aligned}$$

Para o item (b), observe que há, ainda, duas outras desigualdades análogas à desigualdade que foi provada no item (a):

$$DA + DB < CA + CB$$

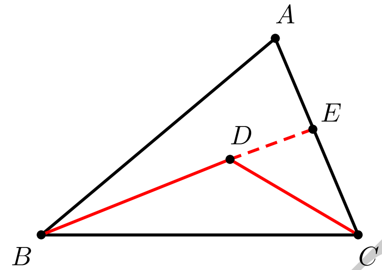

Figura 7: distância de um ponto interior aos vértices de um triângulo (bis).

e

$$DA + DC < BA + BC.$$

Somando membro a membro essas duas últimas desigualdades com aquela do item (a), obtemos

$$2(DA + DB + DC) < 2(AB + AC + BC),$$

ou seja,

$$DA + DB + DC < AB + AC + BC.$$

□

Para nossa próxima aplicação, precisamos definir alguns termos úteis.

Dado um triângulo ABC, definimos a **mediana** relativa ao vértice A (ou ao lado $\overline{BC}$) como o segmento de reta $\overline{AM_1}$, em que M_1 é o ponto médio do segmento BC. Medianas relativas aos vértices B e C podem ser definidas, de maneira análoga, como sendo os segmentos $\overline{BM_2}$ e $\overline{CM_3}$, em que M_2 3 M_3 são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.

Um resultado muito conhecido - mas que não será demonstrado aqui por fugir dos objetivos dessas notas[1] - diz que as três medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado o **baricentro** do triângulo (veja a Figura 8).

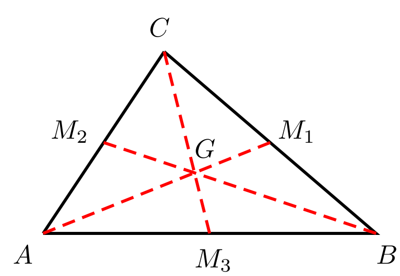

Figura 8: as medianas e o baricentro de um triângulo.

[1] O leitor interessado pode encontrar demonstrações desse fato nas referências colecionadas no final deste material teórico.

Exemplo 9. *Mostre que, em todo triângulo, a soma dos comprimentos das medianas é maior que seu semi-perímetro.*

Prova. Aplicando a desigualdade triangular aos triângulos CGM_1, BGM_3 e AGM_2 (veja a Figura 8), obtemos respectivamente:

$$CM_1 < CG + GM_1,$$

$$BM_3 < BG + GM_3$$

e

$$AM_2 < AG + GM_2.$$

Agora, somando membro a membro as três desigualdades acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot (BC + AB + AC) &= CM_1 + BM_3 + AM_2 \\ &< CG + GM_1 + BG \\ &\quad + GM_3 + AG + GM_2 \\ &= (CG + GM_3) + (BG + GM_2) \\ &\quad + (AG + GM_1) \\ &= CM_3 + BM_2 + AM_1.\end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Sugerimos que seja utilizada uma sessão de 50min para discutir cada uma das seções que compõem esse material. Na Seção 1, procure fazer o uso de desenhos para explicar a desigualdade triangular. Ainda fazendo o uso de desenhos, ressalte que, no caso em que o comprimento de um dos lados de um "*triângulo*" é igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados, os três "vértices" passam a ser colineares e, assim, determinam um "*triângulo degenerado*". Já na Seção 2, explique os resultados apresentados com todos os detalhes, sempre explicitando onde está sendo utilizada a desigualdade triangular.

As referências colecionadas a seguir contêm muito mais sobre a desigualdade triangular.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

3. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.