

**Material Teórico - Módulo Números Naturais: Contagem, Divisibilidade e o Teorema da Divisão Euclidiana**

**Números Naturais e Problemas de Contagem Parte 2**

**Oitavo Ano**

**Autor: Prof. Ulisses Lima Parente**

**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**



# 1 O princípio multiplicativo

Iniciamos esta seção enunciando as duas propriedades abaixo, conhecidas respectivamente como o **Princípio Aditivo** e o **Princípio Multiplicativo**, e que servem de base para a resolução de vários problemas de contagem.

**Proposição 1.** Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos cuja interseção é vazia, então  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ , em que  $n(A)$  denota o número de elementos de  $A$ ,  $n(B)$  denota o número de elementos de  $B$  e  $n(A \cup B)$  denota o número de elementos de  $A \cup B$ .

**Proposição 2.** Se uma decisão  $d_1$  pode ser tomada de  $m$  modos e uma outra decisão  $d_2$ , independente de  $d_1$ , pode ser tomada de  $n$  modos, então o número de modos de se tomar as decisões  $d_1$  e  $d_2$  simultaneamente é  $m \cdot n$ .

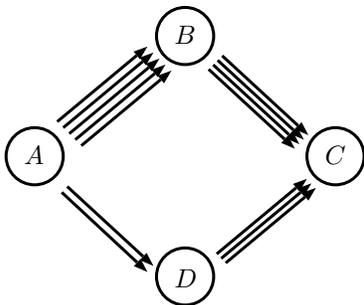
É relativamente simples ver porque o princípio aditivo é verdadeiro; por isso, deixamos essa tarefa ao leitor. Quanto ao princípio multiplicativo, basta observar que podemos listar os possíveis modos de tomarmos as decisões  $d_1$  e  $d_2$  simultaneamente da seguinte forma: começamos formando uma tabela com  $m$  linhas e  $n$  colunas, na qual cada linha corresponde a um modo de tomar a decisão  $d_1$  e cada coluna a um modo de tomar a decisão  $d_2$ . Em seguida, observamos que a tabela tem  $m \cdot n$  entradas, e que cada uma delas corresponde a uma escolha simultânea de uma decisão para  $d_1$  e outra para  $d_2$ .

A seguir, colecionamos alguns exemplos que ilustram como os princípios aditivo e multiplicativo podem ser utilizados na resolução de problemas.

**Exemplo 3.** Um certo país possui 4 cidades, denominadas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Existem 5 estradas ligando  $A$  e  $B$ , 4 estradas ligando  $B$  a  $C$ , 2 estradas ligando  $A$  a  $D$  e 3 estradas ligando  $D$  a  $C$ . Se tais estradas têm mão única, calcule quantas são as maneiras diferentes de viajarmos de  $A$  até  $C$ :

(a) passando por  $B$ .

(b) passando por  $B$  ou  $D$ .



**Solução.** Utilizando o princípio multiplicativo, temos  $5 \cdot 4 = 20$  modos diferentes de viajar de  $A$  até  $C$  passando por  $B$  e outros  $2 \cdot 3 = 6$  modos diferentes de viajar de  $A$  até  $C$  passando por  $D$ . Portanto, pelo princípio aditivo, temos  $20 + 6 = 26$  maneiras diferentes de viajar de  $A$  até  $C$ . Assim, a resposta do item (a) é 20, ao passo que a do item (b) é 26.  $\square$

**Exemplo 4.** Quantos são os números ímpares formados por 3 algarismos?

**Solução.** Podemos reduzir a solução do problema à tomada simultânea de três decisões: escolher o algarismo das unidades, escolher o algarismo das dezenas e escolher o algarismo das centenas.

Podemos escolher o algarismo das unidades de 5 modos, pois, uma vez que estamos contando os números ímpares com três algarismos, o algarismo das unidades deve pertencer ao conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Para a escolha do algarismo das dezenas temos 10 possibilidades, pois não há qualquer restrição para essa escolha, isto é, esse algarismo pode ser qualquer elemento do conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Finalmente, temos 9 modos de escolher o algarismo das centenas, pois ele não pode ser igual a zero, ou seja, deve ser um elemento do conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Portanto, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números ímpares formados por 3 algarismos é  $5 \cdot 10 \cdot 9 = 450$ .  $\square$

**Exemplo 5.** Quantos divisores positivos possui o número 360?

**Solução.** Fatorando o número 360 em um produto de números primos, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array}$$

Nosso objetivo é contar todos os divisores positivos de 360. Como vimos acima,  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ , então, qualquer divisor de 360 necessariamente tem a forma  $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ , em que  $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $b \in \{0, 1, 2\}$  e  $c \in \{0, 1\}$  (pois um divisor de um número não pode ter mais cópias de um fator primo do que o próprio número). Assim, temos 4 modos de escolher  $a$ , 3 modos de escolher  $b$  e 2 modos de escolher  $c$ . Como tais escolhas são simultâneas, segue do princípio multiplicativo que 360 possui  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  divisores positivos.  $\square$

**Observação 6.** Seguindo o raciocínio empregado na resolução do exemplo 5, podemos estabelecer uma fórmula

para calcular a quantidade de divisores positivos de um número inteiro qualquer  $N$ . Para tanto, primeiro fatoramos  $N$  em um produto de potências de números primos distintos. O número de divisores positivos de  $N$  é dado pelo produto dos sucessores dos expoentes que aparecem nessa fatoração. Em símbolos matemáticos, se

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r},$$

com  $p_1, p_2, \dots, p_r$  números primos distintos e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  inteiros positivos, então a quantidade de divisores positivos de  $N$  é dada por

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_r + 1).$$

**Exemplo 7.** Quantos divisores positivos possui o número  $N = 20^2 \cdot 32 \cdot 7^3$ ?

**Solução.** De acordo com a observação anterior, temos inicialmente que escrever  $N$  como produto de potências de primos distintos. Para tanto, note que

$$\begin{aligned} 20^2 \cdot 32 \cdot 7^3 &= (2^2 \cdot 5)^2 \cdot 2^5 \cdot 7^3 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 2^5 \cdot 7^3 \\ &= 2^9 \cdot 5^2 \cdot 7^3. \end{aligned}$$

Portanto, novamente pela observação 6,  $N$  possui

$$(9 + 1)(2 + 1)(3 + 1) = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

divisores positivos.  $\square$

A seguir, apresentamos um exemplo mais elaborado.

**Exemplo 8.** Calcule a quantidade de pares  $(x, y)$  de inteiros positivos que satisfazem a equação

$$\frac{xy}{x+y} = 144.$$

**Solução.** Temos:

$$\begin{aligned} \frac{xy}{x+y} = 144 &\iff xy = 144 \cdot (x+y) \\ &\iff xy = 144x + 144y \\ &\iff xy - 144y = 144x \\ &\iff y \cdot (x - 144) = 144x \\ &\iff y = \frac{144x}{x - 144}. \end{aligned}$$

Fazendo  $n = x - 144$ , temos  $x = n + 144$  e, assim,

$$\begin{aligned} y &= \frac{144x}{x - 144} = \frac{144 \cdot (n + 144)}{n} \\ &= \frac{144n + 144^2}{n} = 144 + \frac{144^2}{n}. \end{aligned}$$

Agora, observe que estamos procurando valores inteiros positivos para  $x$ , de forma que  $n + 144 > 0$  ou, o que é o mesmo,  $n > -144$ . Como também estamos procurando

valores inteiros positivos para  $y$ , concluímos, a partir da última equação acima, que  $n$  deve ser um divisor de  $144^2$ , tal que  $144 + \frac{144^2}{n} > 0$ . Isso é o mesmo que  $\frac{n+144}{n} > 0$  e, como  $n + 144 > 0$  devemos ter  $n > 0$ .

Então,  $n$  é um divisor positivo de  $144^2$ . Também é fácil verificar que, para cada divisor positivo  $n$  de  $144^2$ , temos um valor para  $x$  e um valor para  $y$ , de tal forma que valores distintos para  $n$  fornecem pares  $(x, y)$  distintos. Portanto, a quantidade de pares  $(x, y)$  de inteiros positivos que satisfazem a equação  $\frac{xy}{x+y} = 144$  é igual à quantidade de divisores positivos de  $144^2$ .

Para o que falta, como  $144^2 = (2^4 \cdot 3^2)^2 = 2^8 \cdot 3^4$ , a observação 6 garante que a quantidade de divisores positivos de  $144^2$  é  $(8 + 1)(4 + 1) = 9 \cdot 5 = 45$ .  $\square$

## 2 Mais alguns problemas de contagem

Esta seção coleciona mais exemplos de problemas de contagem, a fim de ilustrar sua diversidade para o leitor. Ao ler as soluções dos exemplos mostrados aqui, o leitor perceberá que não há *regras gerais* ou *fórmulas mágicas* para resolver problemas de contagem. De outra forma, o mais das vezes um pouco de raciocínio será mais útil do que quaisquer fórmulas.

**Exemplo 9.** Um programa de computador calculou os números  $2^{2016}$  e  $5^{2016}$  e escreveu seus algoritmos, de forma consecutiva, na tela. Quantos algoritmos foram mostrados?

**Solução.** Denotemos por  $m$  a quantidade de algoritmos do número  $2^{2016}$  e por  $n$  a quantidade de algoritmos do número  $5^{2016}$ . Nosso objetivo é calcular o valor de  $m + n$ .

Como  $2^{2016}$  possui  $m$  algoritmos,  $10^{m-1}$  é o menor número com  $m$  algoritmos e  $10^m$  é o menor número com  $m + 1$  algoritmos, concluímos que

$$10^{m-1} < 2^{2016} < 10^m.$$

Analogamente,

$$10^{n-1} < 5^{2016} < 10^n.$$

Multiplicando as desigualdades acima e utilizando as propriedades de potenciação, obtemos:

$$10^{m+n-2} < 10^{2016} < 10^{m+n}.$$

Então, devemos ter  $m + n - 2 < 2016$  e  $m + n > 2016$  ou, o que é o mesmo,  $2016 < m + n < 2018$ . Portanto,  $m + n = 2017$ .  $\square$

**Exemplo 10.** Quantos números inteiros e positivos satisfazem a dupla inequação abaixo?

$$2000 < \sqrt{n(n-1)} < 2016$$

**Solução.** Temos:

$$\begin{aligned}2000 &< \sqrt{n(n-1)} < 2016 \\ \Leftrightarrow 2000^2 &< \left(\sqrt{n(n-1)}\right)^2 < 2016^2 \\ \Leftrightarrow 2000^2 &< n(n-1) < 2016^2.\end{aligned}$$

Agora, como  $n$  é um inteiro positivo, é imediato observar que

$$n(n-1) > 2000^2 \Leftrightarrow n > 2000$$

e, analogamente,

$$n(n-1) < 2016^2 \Leftrightarrow n < 2017.$$

Portanto,  $n$  satisfaz a dupla inequação do enunciado se, e somente se,  $2001 \leq n \leq 2016$ , de sorte que temos um total de 16 soluções inteiras e positivas para a mesma.  $\square$

**Exemplo 11.** Em um certo país, a cada 20 matemáticos, um deles também é músico, enquanto que a cada 30 músicos, um deles também é matemático. Há mais músicos ou matemáticos nesse país?

**Solução.** Se denotamos por  $n$  a quantidade de habitantes que são músicos e matemáticos ao mesmo tempo, temos que a quantidade de matemáticos é  $20n$ , pois a cada 20 matemáticos, um também é músico. Por razões análogas, a quantidade de músicos é  $30n$ . Portanto, a quantidade de músicos é 1,5 vezes a quantidade de matemáticos.  $\square$

**Exemplo 12.** Uma urna contém 12 bolas azuis, 7 bolas vermelhas, 9 bolas brancas e 2 bolas pretas. Qual é o número mínimo de bolas que uma pessoa deve retirar da urna para que ela tenha a certeza de ter retirado pelo menos 5 bolas da mesma cor?

**Solução.** No pior dos casos, antes de serem retiradas 5 bolas de uma mesma cor, terão sido retiradas 4 bolas azuis, 4 bolas vermelhas, 4 bolas brancas e 2 bolas pretas, totalizando 14 bolas retiradas. A partir daí, a 15ª bola retirada deverá ser azul, vermelha ou branca, pois as 2 bolas pretas já terão sido retiradas. Portanto, 15 é o número mínimo de bolas que devem ser retiradas para que se tenha, com certeza, pelo menos 5 bolas de uma mesma cor.  $\square$

### 3 Somando os $n$ primeiros naturais

Nesta seção, utilizamos ideias simples de contagem para calcular algumas somas de inteiros. Dentre essas, a mais importante é a colecionada no exemplo a seguir.

**Exemplo 13.** Mostre que

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Solução.** Inicialmente, note que a soma não se altera quando invertemos a ordem das parcelas, ou seja,

$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n = n + (n-1) + \dots + 2 + 1.$$

Denotando essa soma por  $S$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned}S &= n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \\ S &= 1 + 2 + \dots + (n-1) + n\end{aligned}$$

Agora, somamos membro a membro as duas igualdades acima, tendo o cuidado de, no segundo membro, somarmos primeiro as primeiras parcelas, depois as segundas parcelas, depois as terceiras e assim por diante. Procedendo dessa forma, obtemos

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ vezes}}$$

de forma que  $2S = n(n+1)$  e, daí,  $S = \frac{n(n+1)}{2}$ .  $\square$

**Exemplo 14.** Calcule o valor da soma  $1 + 2 + \dots + 2016$ .

**Solução.** Utilizando a fórmula dada no exemplo 13, obtemos:

$$1 + 2 + \dots + 2016 = \frac{2016 \cdot 2017}{2} = 1008 \cdot 2017 = 2033136.$$

$\square$

**Exemplo 15.** Calcule o valor da seguinte soma de números naturais consecutivos:

$$S = 35 + 36 + \dots + 100.$$

**Solução.** Observe que, denotando  $S_1 = 1 + 2 + \dots + 34$  e  $S_2 = 1 + 2 + \dots + 100$ , temos  $S = S_2 - S_1$ . Por outro lado, pela fórmula apresentada no exemplo 13, temos:

$$S_1 = 1 + 2 + \dots + 34 = \frac{34 \cdot 35}{2} = 17 \cdot 35 = 595$$

e

$$S_2 = 1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Portanto,  $S = 5050 - 595 = 4455$ .  $\square$

**Exemplo 16.** Qual número é maior, a soma de todos os números pares de 0 a 100 ou a soma de todos os números ímpares de 1 a 99? Qual a diferença entre o maior e o menor desses dois números?

**Solução.** Calculando a soma dos números pares de 0 a 100, temos:

$$\begin{aligned}0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 100 &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 50) \\ &= 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 2550.\end{aligned}$$

Quanto à soma dos números ímpares, temos

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + 99 &= 1 + (1 + 2) + (1 + 4) \\ &\quad + \dots + (1 + 98) \\ &= \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{50 \text{ vezes}} \\ &\quad + 2 + 4 + 6 + \dots + 98 \\ &= 50 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 49) \\ &= 50 + 2 \cdot \frac{49 \cdot 50}{2} \\ &= 50 + 2450 = 2500. \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos números pares de 0 a 100 é maior que a soma dos números ímpares de 1 a 99. Além disso, a diferença entre esses dois números é igual a 50.  $\square$

**Exemplo 17.** Calcule o valor da soma dos múltiplos de 3 compreendidos entre 1 e 200.

**Solução.** Os múltiplos de 3 entre 1 e 200 são  $\{3, 6, \dots, 198\}$ . Então, o que queremos é encontrar o valor da soma

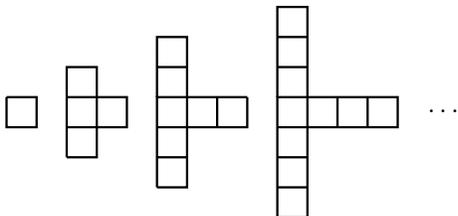
$$S = 3 + 6 + \dots + 198.$$

Mas, observe que

$$\begin{aligned} S = 3 + 6 + \dots + 198 &= 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 66) \\ &= 3 \cdot \frac{66 \cdot 67}{2} \\ &= 3 \cdot 33 \cdot 67 \\ &= 6633. \end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 18.** Considere a seqüência de figuras formadas por pequenos azulejos quadrados e desenhada abaixo. Quantos azulejos são necessários para formar desde a primeira até a centésima figura?



**Solução.** Observe que a primeira figura é formada por apenas 1 azulejo, e a partir da segunda, cada figura pode ser formada a partir da anterior acrescentando-se 3 azulejos, sendo um em cada ponta. Então, a segunda figura é formada por  $1 + 3 = 4$  azulejos, a terceira é formada por  $1 + 2 \cdot 3 = 7$  azulejos, a quarta é formada por  $1 + 3 \cdot 3 = 10$  azulejos, e assim por diante.

Dessa forma, concluímos que a centésima figura é formada por  $1 + 99 \cdot 3 = 298$  azulejos. Portanto, a quantidade de azulejos utilizados para formar desde a primeira até a centésima figura é:

$$\begin{aligned} 1 + (1 + 3) + (1 + 2 \cdot 3) + (1 + 3 \cdot 3) + \dots + (1 + 99 \cdot 3) &= \\ &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{100 \text{ vezes}} + 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + \dots + 99 \cdot 3 \\ &= 100 + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 99) \\ &= 100 + 3 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} \\ &= 100 + 3 \cdot 4950 = 14950. \end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 19.** Considere a seqüência dos 50 primeiros números naturais. É possível escrever um dos sinais + ou - antes de cada um desses números de tal modo que o resultado da expressão numérica resultante seja igual a zero?

$$\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \dots \square 49 \square 50$$

**Solução.** Suponha que seja possível pôr um dos sinais + ou - em cada quadradinho da figura acima, de modo que o resultado da expressão numérica obtida seja igual a zero. Podemos separar os números do conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 49, 50\}$  em dois subconjuntos, um deles, que denotaremos por  $A_1$ , formado pelos números que são precedidos pelo sinal +, e o outro, que denotaremos por  $A_2$ , formado pelos números que são precedidos pelo sinal -. Para que o resultado da expressão seja zero, a soma dos números dos dois grupos deve ser a mesma. Denotemos essa soma por  $S$ . Como a reunião dos elementos dos dois grupos é o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 49, 50\}$ , a soma dos elementos de  $A$  deve ser igual a  $2S$ . Logo, a soma dos elementos de  $A$  deve ser um número par. Mas, pelo exemplo 13, a soma dos elementos do conjunto  $A$  é dada por:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49 + 50 = \frac{50 \cdot 51}{2} = 1275.$$

Como essa soma é um número ímpar, o que nos leva a concluir que não é possível pôr um dos sinais + ou - nos quadradinhos de modo que o resultado da expressão seja zero.  $\square$

## 4 Somando os $n$ primeiros quadrados

Terminamos este material mostrando como somar os  $n$  primeiros quadrados perfeitos.

**Exemplo 20.** *Mostre que*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Solução.** Iniciamos recordando a fórmula para o cubo da soma de dois termos, apresentada no módulo de produtos notáveis e fatoração de expressões algébricas:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Utilizando essa fórmula, podemos escrever:

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3$$

$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1^3$$

$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1^2 + 1^3$$

⋮

$$n^3 = (n-1)^3 + 3 \cdot (n-1)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (n-1) \cdot 1^2 + 1^3$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 \cdot 1 + 3 \cdot n \cdot 1^2 + 1^3.$$

(Note que na penúltima das igualdades acima, escrevemos  $n = (n-1) + 1$ .)

Agora, somando todas essas  $n$  igualdades membro a membro, percebemos que os cubos dos números inteiros de 2 até  $n$  figuram em ambos os lados da equação. Portanto, podemos cancelar esses cubos, restando apenas  $(n+1)^3$  do lado esquerdo. Então, denotando

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2,$$

temos:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= 1^3 + 3S + 3(1+2+\dots+n) + \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ vezes}} \\ &= 1 + 3S + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n. \end{aligned}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} 3S &= (n+1)^3 - 1 - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \\ \Rightarrow 6S &= 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \\ \Rightarrow 6S &= (n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2] \\ \Rightarrow 6S &= (n+1)[2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2] \\ \Rightarrow 6S &= (n+1)[2n^2 + n] \\ \Rightarrow 6S &= (n+1)n(2n+1) \\ \Rightarrow S &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 21.** *Calcule o valor da soma:*

$$S = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 2500.$$

**Solução.** Observe que a soma acima é a soma dos primeiros cinquenta quadrados, ou seja,

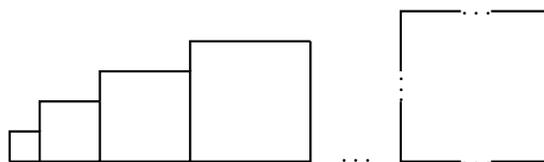
$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2.$$

Portanto, pela fórmula deduzida no exemplo anterior, temos

$$S = \frac{50 \cdot 51 \cdot (2 \cdot 50 + 1)}{6} = \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 42925.$$

□

**Exemplo 22.** *Uma figura  $Q$  é formada pela justaposição de 100 quadrados, sendo que o primeiro quadrado tem lado 1 cm, o segundo tem lado 2 cm, o terceiro tem lado 3 cm, e assim por diante até o centésimo, que tem lado 100 cm. Calcule a área de  $Q$ .*



**Solução.** Denotemos por  $A_Q$  a área de  $Q$ . Uma vez que a área de um quadrado é o quadrado do comprimento de seu lado, temos que  $A_Q$  é dada pela soma dos 100 primeiros quadrados. Assim, temos:

$$\begin{aligned} A_Q &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2 \\ &= \frac{100 \cdot 101 \cdot (2 \cdot 100 + 1)}{6} \\ &= \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} \\ &= 338350 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

□

## Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas uma sessão de 50min para discutir as seções 1 e 2 e uma outra sessão de 50min para discutir as seções 3 e 4. Na seção 1, explique muito cuidadosamente os princípios aditivo e multiplicativo, enfatizando sua utilização nos exemplos que vêm em seguida. Nas seções 3 e 4, inicialmente proponha problemas envolvendo somas de números naturais e de quadrados de números naturais consecutivos, e somente depois apresente e dedize as fórmulas correspondentes. Isso vai fazer com que os alunos procurem estratégias não convencionais para calcular as somas em questão.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 4: Combinatória*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2016.
2. D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg. *Mathematical World, Volume 8: Mathematical Circles (Russian Experience)*. AMS, 1996.
3. E. Lima. *Análise Real, Volume 1*. Rio de Janeiro, SBM, 1993.
4. A. C. Morgado, J. B. P. de Carvalho, P. C. P. Carvalho e P. J. Fernandez. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro, SBM, 2004.