

Material Teórico - Módulo de Geometria das Transformações Lineares

Transformações Lineares no \mathbb{R}^2 - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

13 de Novembro de 2021



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Na aula anterior, definimos o conceito de transformação linear entre espaços vetoriais. Essencialmente, desenvolvemos naquela ocasião a classe das homotetias, indicando algumas aplicações geométricas. Agora apresentaremos mais duas classes de transformações lineares: as *rotações* e as *reflexões*. Como antes, identificaremos tais transformações com aplicações do plano e discutiremos alguns resultados em geometria plana. Encerraremos com uma classificação geométrica das isometrias do plano.

1 Transformações Lineares: Mais Alguns Exemplos

Lembre-se que V denota o espaço dos vetores no plano.

1.1 Rotações

Utilizaremos o grau como unidade de medida para ângulos.

Definição 1. *Dado um número real θ no intervalo $(-180, 180]$, a rotação de ângulo θ é a transformação $R_\theta : V \rightarrow V$ que a cada vetor v associa o vetor $R_\theta(v)$ com as seguintes propriedades:*

- i) $R_\theta(v)$ e v têm mesmo módulo (em particular, $R_\theta(0) = 0$).*
- ii) Se $v \neq 0$, o ângulo orientado de v para $R_\theta(v)$ é igual a θ .*

Em relação a definição, dizemos que θ é o *ângulo orientado* de v para w quando $|\theta|$ é o ângulo entre v e w e o sentido de (menor) rotação de v para w é anti-horário se $\theta > 0$, ou horário se $\theta < 0$.

Rotações se expressam de um modo simples se utilizamos números complexos. Basta lembrar da forma polar: dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, podemos escrever $z = |z| \operatorname{cis} \alpha$, em que $\operatorname{cis} \alpha = \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot i$ e $\alpha \in (-180, 180]$ é o ângulo orientado de 1 (que se identifica ao vetor $(1, 0)$) para z (que identificamos com o vetor de coordenadas a e b). Portanto, dado um vetor unitário $w = \operatorname{cis} \theta$, a relação

$$\operatorname{cis} \theta \cdot \operatorname{cis} \alpha = \operatorname{cis}(\theta + \alpha) \tag{1}$$

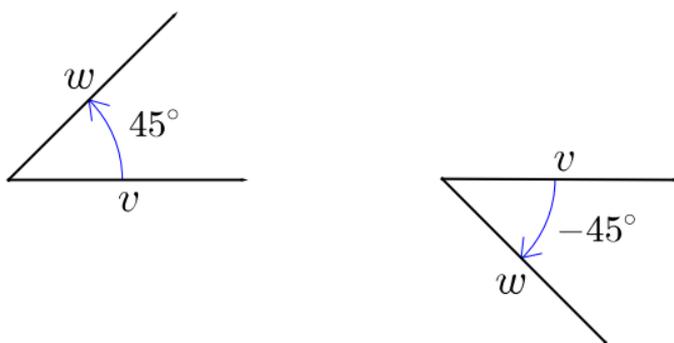


Figura 1: À esquerda, o ângulo de v para w é igual a 45° . À direita, -45° é o ângulo de v para w . De outro modo, $R_{45^\circ}(v) = w$ e $R_{-45^\circ}(v) = w$, respectivamente.

nos diz que $wz = |z| \operatorname{cis}(\theta + \alpha)$ é a imagem de z pela rotação R_θ . Considerando a identificação usual entre V e \mathbb{C} , temos $R_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $R_\theta(z) = wz$. Daí segue a linearidade de R_θ :

$$\begin{aligned} R_\theta(u + v) &= w(u + v) \\ &= wu + wv \\ &= R_\theta(u) + R_\theta(v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_\theta(k \cdot u) &= w(k \cdot u) \\ &= k \cdot (wu) \\ &= k \cdot R_\theta(u). \end{aligned}$$

Observação 2. *i) A restrição “ $\theta \in (-180, 180]$ ” é desnecessária na definição de R_θ . De fato, um número real θ arbitrário se escreve, de modo único, como $\theta = k \cdot 360 + \theta'$, em que $k \in \mathbb{Z}$ e $\theta' \in (-180, 180]$. Daí, basta definir $R_\theta = R_{\theta'}$, o que é coerente com a igualdade $\operatorname{cis} \theta = \operatorname{cis} \theta'$. Tendo definido R_θ , para qualquer θ , a relação (1) nos permite concluir a igualdade $R_\beta \circ R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$, para quaisquer ângulos α e β . Sendo $R_0 = \operatorname{Id}$, vemos que cada rotação R_θ é uma bijeção cuja inversa é a rotação $R_{-\theta}$.*

ii) Conforme comentamos numa aula anterior, a multiplicação

por um número complexo $w \neq 0$ determina uma roto-homotetia (positiva): se $\theta = \arg w$, a correspondência $\mathbb{C} \ni z \mapsto wz \in \mathbb{C}$ consiste da rotação R_θ composta com a homotetia $T_{|w|}$.

iii) Toda rotação é uma isometria. Pois, utilizando a forma complexa,

$$\begin{aligned} |R_\theta(u) - R_\theta(v)| &= |wu - wv| \\ &= |w||u - v| \\ &= |u - v|, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $u, v \in \mathbb{C}$.

Fixemos um ponto O no plano Π e um ângulo θ . Defina-se a rotação de centro em O e ângulo θ como a transformação do plano $R_{O,\theta} : \Pi \rightarrow \Pi$ satisfazendo $R_{O,\theta}(P) = O + R_\theta(\overrightarrow{OP})$, qualquer que seja $P \in \Pi$.

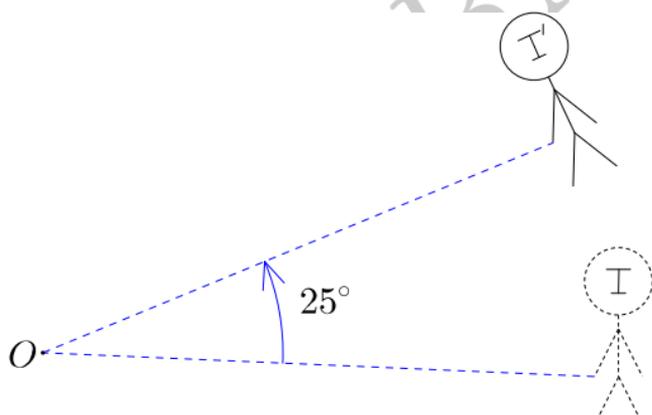


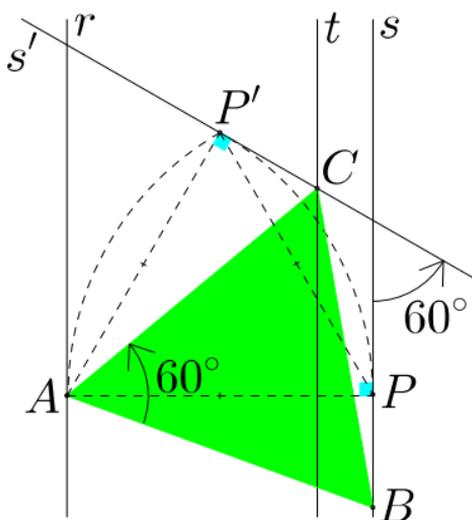
Figura 2: A figura I' é a imagem da figura I pela rotação de centro em O e ângulo 25° .

Observação 3. i) A rotação de centro em O e ângulo 180° coincide com a simetria em torno do ponto O .

ii) Por ser uma isometria (ou, mais geralmente, uma semelhança), a rotação $R_{O,\theta}$ deve transformar retas em retas preservando ângulos. Mais precisamente, se r e s são retas, então $r' = R_{O,\theta}(r)$ e $s' = R_{O,\theta}(s)$ também são retas e $\text{ang}(r', s') = \text{ang}(r, s)$ (veja [3]).

Exemplo 4. Dadas três retas r, s e t , duas a duas paralelas, construa um triângulo equilátero com vértices nessas retas.

Solução. Considere a figura abaixo, em que um ponto A foi fixado na reta r . Supondo o problema resolvido, de modo que



$B \in s, C \in t$ e o ângulo de \overrightarrow{AB} para \overrightarrow{AC} seja 60° , vemos que o ponto C pertence à reta s' , em que s' é a imagem da reta s pela rotação $R_{A,60^\circ}$. Portanto, C é o ponto de interseção das retas s' e t . Assim, já sabemos como proceder.

Para construir um triângulo equilátero ABC conforme o enunciado, considere a reta $s' = R_{A,60^\circ}(s)$: tome P , o pé da perpendicular baixada de A sobre s , e construa o triângulo equilátero APP' , sendo o ângulo de \overrightarrow{AP} para $\overrightarrow{AP'}$ igual a 60° ; a reta s' é a perpendicular à reta $\overleftarrow{AP'}$ por P' . Se C é o ponto de interseção de s' e t , construímos agora o triângulo equilátero ABC de tal modo que $R_{A,60^\circ}(B) = C$. Como rotações são bijetivas, segue-se que $B \in s$ e a construção está feita. \square

Se o ponto O é o afixo do número complexo o e $w = \text{cis } \theta$, a rotação $R_{O,\theta}$, interpretada como uma aplicação de \mathbb{C} em \mathbb{C} , se escreve como $R_{O,\theta}(z) = o + w(z - o)$ ou, equivalentemente, $R_{O,\theta}(z) = (1 - w)o + wz$. Com base nisso, discutiremos agora a composição de rotações.

Considere duas rotações $R_{O,\theta}$ e $R_{O',\theta'}$, definidas por $R_{O,\theta}(z) = (1-w)o + wz$ e $R_{O',\theta'}(z) = (1-w')o' + w'z$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Um cálculo simples nos leva a

$$(R_{O',\theta'} \circ R_{O,\theta})(z) = (1-w')o' + w'(1-w)o + w'wz.$$

Se $ww' = 1$ ou, equivalentemente, $\theta' + \theta = k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, a composta $R_{O',\theta'} \circ R_{O,\theta}$ é uma translação.

Se $\theta' + \theta$ não é um múltiplo inteiro de 360° , podemos reescrever a regra da composta como

$$(R_{O',\theta'} \circ R_{O,\theta})(z) = (1-w'w)o'' + (w'w)z,$$

em que $o'' = \frac{(1-w')o' + w'(1-w)o}{1-w'w}$. Isso mostra, nesse caso, que $R_{O',\theta'} \circ R_{O,\theta}$ é a rotação de centro em O'' e ângulo $\theta' + \theta$. Queremos agora identificar o centro O'' dessa rotação (o afixo do número complexo o''). Se $O' = O$, então $O'' = O$ pois já sabemos que $R_{O,\theta'} \circ R_{O,\theta} = R_{O,\theta'+\theta}$. Vejamos o caso em que $O \neq O'$. Como as conclusões da nossa análise dizem respeito à ângulos, não faz mal supor $o = 0$ e $o' = 1$ (precisamos transladar, rotacionar e depois reescalonar o sistema de coordenadas antigo. A composição dessas transformações é uma semelhança!). Com essas hipóteses, vale $o'' = \frac{1-w'}{1-ww'}$. Lembrando que o conjugado de um número complexo unitário coincide com o seu recíproco, as regras básicas da conjugação nos permitem escrever

$$\begin{aligned} \overline{o''} &= \overline{\left(\frac{1-w'}{1-ww'} \right)} \\ &= \frac{1-\overline{w'}}{1-\overline{ww'}} \\ &= \frac{1-\frac{1}{w'}}{1-\frac{1}{w'w}} \\ &= \frac{\frac{w'-1}{w'}}{\frac{w'w-1}{w'w}} \\ &= w o''. \end{aligned}$$

Desse modo, $w(o'')^2 = |o''|^2 \Rightarrow (o'')^2 = |o''|^2 \overline{w}$, de onde se conclui que $\arg(o'') = -\theta/2$, ou melhor, o ângulo de $\overrightarrow{OO''}$

para $\overrightarrow{OO''}$ é $-\theta/2$. Por um argumento análogo, o ângulo de $\overrightarrow{O'O}$ para $\overrightarrow{O'O''}$ é $\theta'/2$. Segue um resumo da discussão.

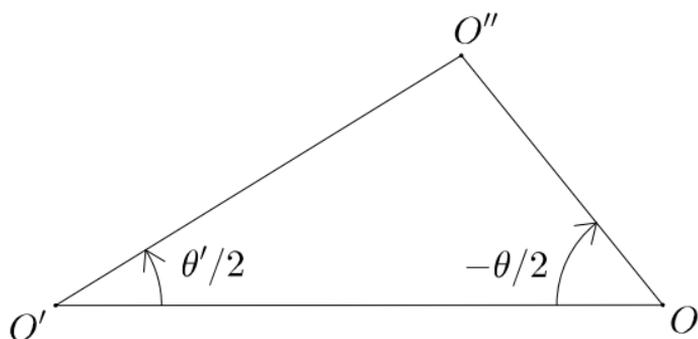


Figura 3: O centro O'' da composição $R_{O',\theta'} \circ R_{O,\theta}$.

Proposição 5. *Considere as rotações de centros distintos $R_{O,\theta}$ e $R_{O',\theta'}$. Então, a composta $R_{O',\theta'} \circ R_{O,\theta}$ dessas rotações é*

- i) *uma translação, se $\theta' + \theta$ é um múltiplo inteiro de 360° ;*
- ii) *uma rotação de ângulo $\theta' + \theta$, caso $\theta' + \theta$ não seja um múltiplo inteiro de 360° . O centro dessa rotação é o ponto O'' determinado pelas seguintes condições: o ângulo de $\overrightarrow{OO'}$ para $\overrightarrow{OO''}$ é $-\theta/2$, enquanto que o ângulo de $\overrightarrow{O'O}$ para $\overrightarrow{O'O''}$ é $\theta'/2$.*

No próximo exemplo, demonstraremos um resultado notável de geometria plana, o **Teorema de Napoleão**: *os centros dos triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados de um triângulo qualquer formam um triângulo equilátero.* Precisaremos do

Lema 6. *Se $\theta' + \theta = 180^\circ$, então*

$$R_{O',\theta'} \circ R_{O,\theta} \circ R_{O',\theta'} = R_{O,-\theta}. \quad (2)$$

Demonstração. Se $S = R_{O',\theta'} \circ R_{O,\theta}$, a hipótese do lema, a Proposição (5) e a Observação (3) nos garantem que S é uma simetria. Em particular, $S \circ S = Id$, ou seja,

$$R_{O',\theta'} \circ R_{O,\theta} \circ R_{O',\theta'} \circ R_{O,\theta} = Id.$$

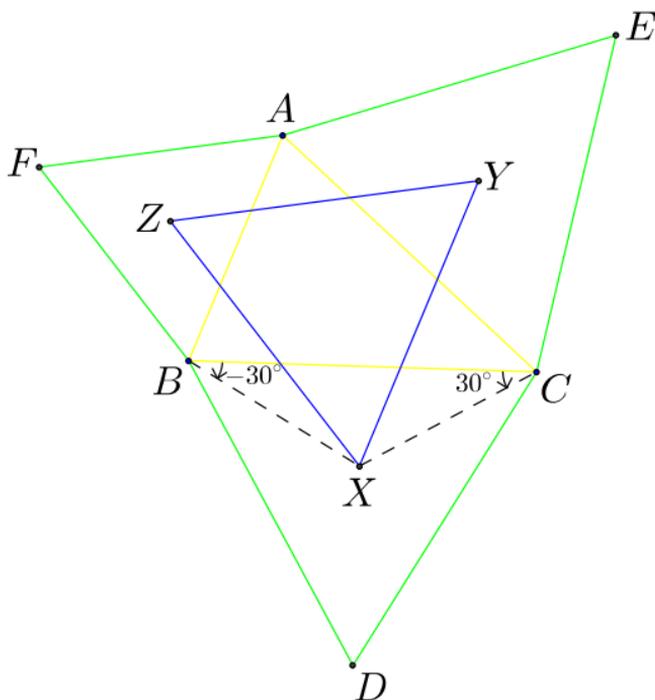


Figura 4: O Teorema de Napoleão.

Mas isso nos diz que $R_{O',\theta'} \circ R_{O,\theta} \circ R_{O',\theta'}$ é a inversa de $R_{O,\theta}$, isto é, vale a relação (2). \square

Exemplo 7. *Prove o Teorema de Napoleão.*

Solução. Para simplificar a escrita, dado um ponto P qualquer no plano seja $R_P := R_{P,60^\circ}$. Considerando a notação introduzida na figura acima, a Proposição (5) nos conta que $R_C \circ R_B = R_{X,120^\circ}$, $R_A \circ R_C = R_{Y,120^\circ}$ e $R_B \circ R_A = R_{Z,120^\circ}$. Essas igualdades juntamente com o Lema (6) nos dão

$$\begin{aligned}
 R_{X,120^\circ} \circ R_{Y,120^\circ} &= (R_C \circ R_B) \circ (R_A \circ R_C) \\
 &= R_C \circ (R_B \circ R_A) \circ R_C \\
 &= R_{C,60^\circ} \circ R_{Z,120^\circ} \circ R_{C,60^\circ} \\
 &= R_{Z,-120^\circ},
 \end{aligned}$$

ou seja, $R_{X,120^\circ} \circ R_{Y,120^\circ} = R_{Z,240^\circ}$. Novamente pela Proposição (5), segue-se que o triângulo XYZ possui ângulos de

60° nos vértices X e Y , isto é, XYZ é equilátero. \square

Podemos explicitar as coordenadas do vetor $R_\theta(v)$ em função das coordenadas x e y do vetor v . Segue imediatamente da fórmula $R_\theta(x,y) = (\cos \theta, \text{sen } \theta) \cdot (x,y)$, sendo “ \cdot ” a multiplicação complexa, a relação abaixo:

$$R_\theta(x,y) = (\cos \theta \cdot x - \text{sen } \theta \cdot y, \text{sen } \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y). \quad (3)$$

1.2 Reflexões

Definição 8. *Seja r uma reta do plano. A reflexão em torno de r é a transformação $S_r : \Pi \rightarrow \Pi$ definida da seguinte forma:*

i) $S_r(P) = P$, se $P \in r$.

ii) Se $P \notin r$, r é a mediatriz do segmento de reta de extremos P e $S_r(P)$.

Dizemos que $S_r(P)$ é o reflexo (ou simétrico) de P em relação à reta r .

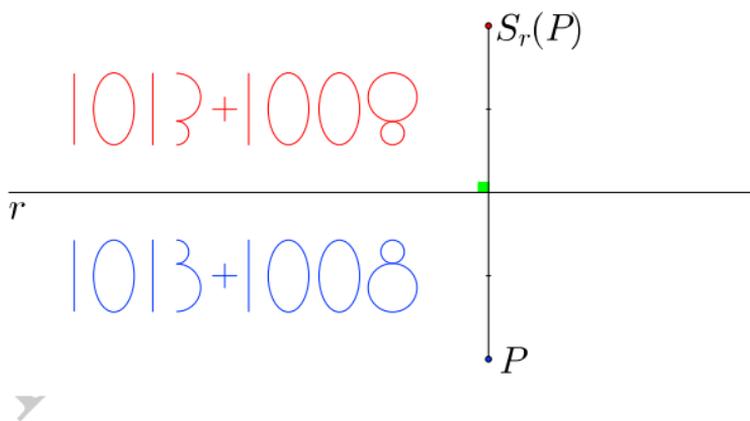


Figura 5: Alguns objetos em azul e as suas respectivas imagens em vermelho pela reflexão em torno da reta r .

Exemplo 9. *O reflexo do ortocentro de um triângulo T em relação a reta suporte de qualquer um dos seus lados pertence ao circuncírculo de T . Veja [1].*

Escolhendo o sistema de coordenadas de tal modo que a reta r coincida com o eixo das abscissas, teremos $S_r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $S_r(z) = \bar{z}$, ou seja, $S_r(z)$ é o conjugado do número complexo z . Daí segue que *toda reflexão é uma isometria*.

Se, por outro lado, o sistema de coordenadas já foi fixado, expressamos r por meio de sua equação vetorial, $r : z = u + tv$, $t \in \mathbb{R}$ (com as identificações usuais entre Π, \mathbb{C} e V , a reta r passa por u na direção de v . Veja a 2ª parte da aula “vetores no plano” desse módulo). Podemos supor $|v| = 1$, digamos $v = \text{cis } \alpha$. Para determinar $S_r(z)$ em função de u, v e z , seguimos os seguintes passos.

1º: a translação T_{-u} transforma a reta r na reta $r' : z = tv$ passando pela origem.

2º: a rotação $R_{O, -\alpha}$ leva a reta r' no eixo das abscissas.

3º: a composição $R_{O, -\alpha} \circ T_{-u}$ transforma z em $w = \bar{v}(z - u)$.

4º: $S_r(z)$ deve ser transformado por essa composição no conjugado de w , ou seja, $\bar{v}(S_r(z) - u) = \overline{\bar{v}(z - u)} = v(\bar{z} - \bar{u})$.

5º: resolvendo, vem $S_r(z) = u - v^2\bar{u} + v^2\bar{z}$.

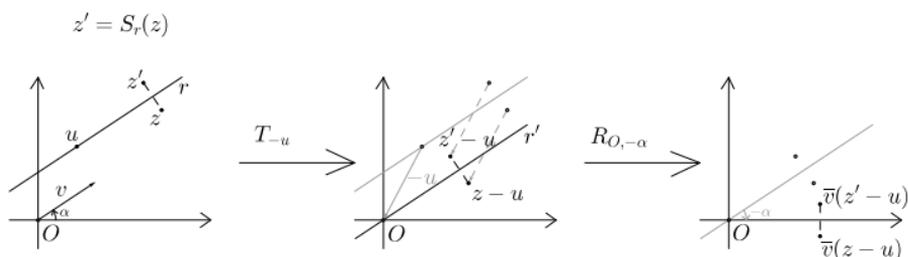


Figura 6: Ilustrando os passos para obter $S_r(z)$.

Se $r : z = tv, t \in \mathbb{R}$, é uma reta passando pela origem, então $S_r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma *aplicação linear*. Com efeito, vale

$$S_r(z) = v^2\bar{z}, \quad (4)$$

o que torna a verificação da linearidade de S_r um simples exercício que deixamos ao encargo do leitor.

Exemplo 10 (Problema de Herão). *Considere uma reta r e pontos A e B de um mesmo lado dessa reta. Construa o ponto $P \in r$ que minimiza a soma $\overline{AP} + \overline{PB}$.*

Solução. Seja B' o simétrico de B em relação à reta r . Se P é o ponto de interseção da reta r com a reta $\overleftrightarrow{AB'}$, vejamos que $\overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AQ} + \overline{QB}$, qualquer que seja o ponto $Q \in r$, com $Q \neq P$. Com efeito, como r é a mediatriz de BB' , vem $\overline{PB'} = \overline{PB}$. Pelo mesmo motivo, $\overline{QB'} = \overline{QB}$. Como A, B' e Q são não-colineares, a desigualdade triangular nos dá

$$\begin{aligned} \overline{AQ} + \overline{QB} &= \overline{AQ} + \overline{QB'} \\ &> \overline{AB'} \\ &= \overline{AP} + \overline{PB'} \\ &= \overline{AP} + \overline{PB}, \end{aligned} \quad (5)$$

como queríamos. □

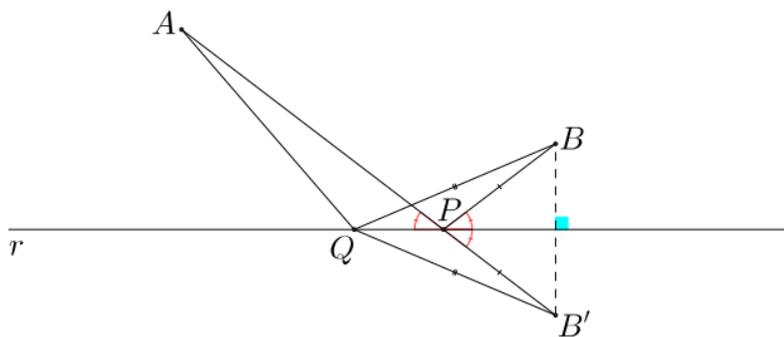


Figura 7: O problema de Herão.

Observação 11. *Com relação ao exemplo anterior, note que as retas \overleftrightarrow{AP} e \overleftrightarrow{BP} fazem ângulos iguais com a reta r . Além disso, o ponto P se caracteriza por essa propriedade.*

Para o próximo exemplo, vamos recordar a definição de elipse. Sejam F, F' pontos no plano e a um número real positivo satisfazendo $2a > \overline{FF'}$. A elipse de focos F e F' e eixo maior $2a$ é o lugar geométrico dos pontos P no plano tais que $\overline{FP} + \overline{PF'} = 2a$. Dizemos que uma reta r é tangente à elipse \mathcal{E} no ponto P quando $r \cap \mathcal{E} = \{P\}$.

Exemplo 12. Dado um ponto P numa elipse \mathcal{E} , seja s a bissetriz do ângulo $\angle FPF'$. Mostre que a reta r perpendicular a s pelo ponto P é tangente à elipse \mathcal{E} .

Solução. Basta notar que, pela Observação (11), o ponto P resolve o problema de Herão para a terna (F, F', r) , uma vez que as retas \overleftrightarrow{FP} e $\overleftrightarrow{F'P}$ fazem ângulos iguais com a reta r . Pelo Exemplo (10), dado $Q \in r, Q \neq P$, tem-se $\overline{FQ} + \overline{QF'}$ maior que $\overline{FP} + \overline{PF'}$, ou seja, $\overline{FQ} + \overline{QF'} > 2a$, de onde se conclui que $Q \notin \mathcal{E}$. Logo, $r \cap \mathcal{E} = \{P\}$, i. e., r é tangente à elipse \mathcal{E} no ponto P . \square

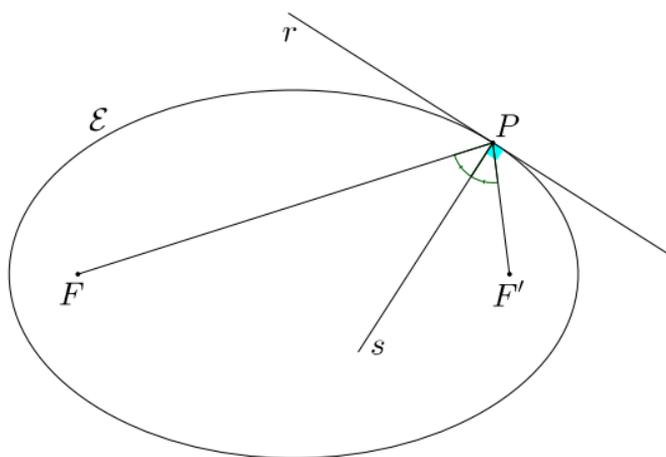


Figura 8: A propriedade refletora da elipse.

Até então obtivemos três classes de transformações lineares de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 :

1. As homotetias

$$T_k(x, y) = (kx, ky), \quad k \in \mathbb{R}^*.$$

2. As rotações

$$R_\theta(x,y) = (\cos \theta \cdot x - \operatorname{sen} \theta \cdot y, \operatorname{sen} \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y).$$

Veja (3).

3. As reflexões

$$S_r(x,y) = (\cos 2\alpha \cdot x + \operatorname{sen} 2\alpha \cdot y, \operatorname{sen} 2\alpha \cdot x - \cos 2\alpha \cdot y),$$

em que $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$ é um ponto da reta r (cf. (4)).

Sendo $a = \operatorname{tg} \alpha$ a inclinação da reta r , temos $\cos 2\alpha = \frac{1-a^2}{1+a^2}$ e $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2a}{1+a^2}$, de modo que $S_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ também se expressa como

$$S_r(x,y) = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}x + \frac{2a}{1+a^2}y, \frac{2a}{1+a^2}x - \frac{1-a^2}{1+a^2}y \right).$$

2 Classificação das Isometrias

A próxima definição nos apresenta mais um tipo de isometria do plano.

Definição 13. *A composição de uma reflexão com uma translação, em qualquer ordem, chama-se uma reflexão com deslizamento.*

Assim, translações, rotações, reflexões e reflexões com deslizamento são isometrias. Reciprocamente

Teorema 14. *Se $I : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma isometria, então I é de um dos quatro tipos mencionados acima.*

Demonstração. Interpretaremos I como uma aplicação de \mathbb{C} em \mathbb{C} . Pelo Teorema 15 da 2ª parte da aula “vetores no plano” desse módulo, existem $a, b \in \mathbb{C}, |a| = 1$ tais que $I(z) = az + b, \forall z \in \mathbb{C}$, ou $I(z) = a\bar{z} + b, \forall z \in \mathbb{C}$. No primeiro caso, I é uma translação se $a = 1$ ou uma rotação se $a \neq 1$. De fato, se $a \neq 1$, podemos escrever $I(z) = (1-a)o + az$, em que $o = \frac{b}{1-a}$. Daí, I é a rotação de centro em O , afixo de o ,

e ângulo $\theta = \arg(\alpha)$. No segundo caso, pela relação (4), I é uma reflexão ou uma reflexão com deslizamento conforme seja $b = 0$ ou $b \neq 0$. \square

Dicas para o Professor

Continuaremos estudando as transformações lineares do espaço vetorial V nas próximas aulas, adotando um ponto de vista mais algébrico. Desse modo, encerramos aqui uma digressão considerável, que consistiu do estudo de algumas das principais transformações geométricas no plano. Ainda há muito por explorar. Recomendamos ao Professor as referências [3] e [4] para aprofundamento e como fonte de problemas geométricos interessantes.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 2. *Geometria Euclidiana Plana*. 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
2. E. L. Lima. *Coordenadas no Plano*. 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
3. E. L. Lima. *Isometrias*. 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
4. E. Wagner. *Construções Geométricas*. 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2007.