Material Teórico - Módulo de Geometria Analítica 2

Distância de Ponto a Reta

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Distância da origem a uma reta

Em Geometria, a expressão *figura plana* designa um conjunto de pontos do plano. Dadas duas figuras planas F_1 e F_2, chamamos de **distância** entre F_1 e F_2 a menor distância possível entre pontos das duas figuras. Mais precisamente, denotando por $d(X,Y)$ o comprimento do segmento de extremidades X e Y, definimos a distância $d(F_1,F_2)$ entre as figuras planas F_1 e F_2 pondo

$$d(F_1,F_2) = \min\{d(X,Y) \mid X \in F_1, Y \in F_2\}, \qquad (1)$$

contanto que tal mínimo exista.

Nem sempre o mínimo acima existe. Para um exemplo considere, no plano cartesiano, F_1 como o eixo das abscissas (eixo horizontal) e F_2 como o gráfico da função $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$.

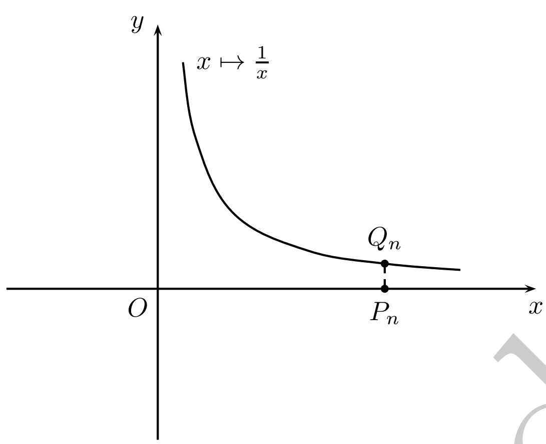

Figura 1: exemplo de distância não definida.

Por um lado, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, de forma que, se $d(F_1,F_2)$ estiver definida, sendo realizada pelo comprimento de um segmento PQ com $P \in F_1$ e $Q \in F_2$, então teremos

$$d(F_1,F_2) = d(P,Q) > 0.$$

Por outro, para cada $n \in \mathbb{N}$, ponha $P_n = (n,0)$ e $Q_n = \left(n, \frac{1}{n}\right)$, de forma que $P_n \in F_1$ e $Q_n \in F_2$. Então, a escolha de P e Q, juntamente com a fórmula para a distância entre dois pontos, fornece

$$PQ \le P_nQ_n = \sqrt{(n-n)^2 + \left(0 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas essa desigualdade não pode ser sempre verdadeira; basta escolhermos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{PQ}$.

Não discutiremos a questão geral de condições sobre F_1 e F_2 que garantam a existência do mínimo em (1). Aqui, estamos interessados no caso particular em que $F_1 = \{P\}$ é formado por um único ponto e $F_2 = r$ é uma reta. Nesse caso, vamos mostrar que a distância mínima sempre existe, e a denotaremos por $d(P,r)$.

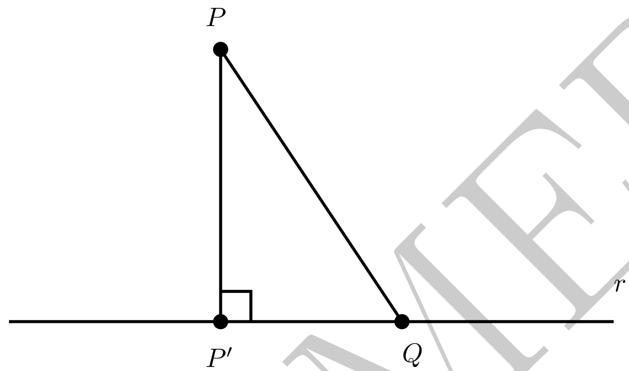

Figura 2: distância de um ponto P a uma reta r.

Seja r uma reta e P um ponto. Se $P \in r$, então podemos tomar $Q = P$ em (1), de forma que a distância entre P e r é igual a zero. Suponha, pois, que $P \notin r$.

Seja P' o pé da perpendicular baixada desde P à reta r. Se Q é outro ponto da reta, então o triângulo $\Delta PP'Q$ é retângulo com hipotenusa PQ e tendo PP' como um dos catetos. Como, em um triângulo retângulo, o maior lado (por se opor ao maio ângulo) é sempre a hipotenusa, temos que $PP' < PQ$, ou seja,

$$d(P,P') \le d(P,Q),$$

para todo ponto $Q \in r$, valendo a igualdade se, e somente se, $Q = P'$. Assim a distância entre o ponto P e a reta r é igual à distância entre o ponto P e o ponto P', pé da perpendicular baixada de P a r.

Vamos, agora, obter uma expressão que fornece a distância entre um ponto e uma reta em função das coordenadas do ponto e da equação da reta. Começaremos analisando o caso particular em que o ponto P é a origem: $P = (0,0)$.

Dada uma reta r de equação $ax + by + c = 0$ e que não passa pela origem (i.e., tal que $c \neq 0$), seja $r' : a'x + b'y = 0$ a reta perpendicular a r e que passa pela origem.

Como já vimos na aula sobre ângulo entre retas, sendo r e r' perpendiculares vale a relação

$$aa' + bb' = 0$$

entre seus coeficientes.

Suponhamos que $b \neq 0$. Então, podemos escrever

$$b' = -\frac{aa'}{b}. \qquad (2)$$

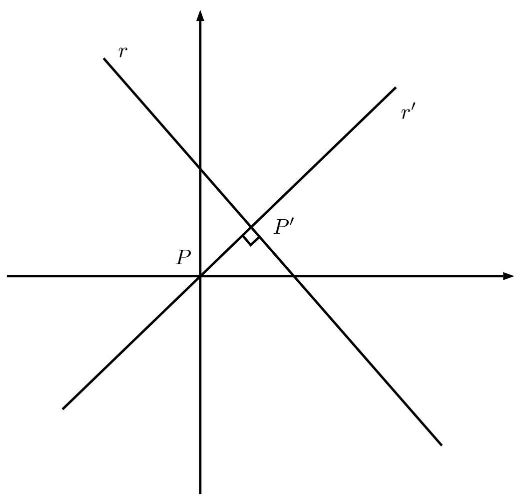

Figura 3: a distância da origem à reta r é igual à distância do ponto P' à origem.

Caso b seja igual a zero, podemos considerar a equação $a' = -\frac{bb'}{a}$, pois, neste caso, $a \neq 0$.

As coordenadas do ponto P', interseção das retas r e r', podem ser encontradas resolvendo-se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{array} \right. .$$

Para tanto, multiplicamos a primeira equação por b' e a segunda por b, obtendo

$$\left\{ \begin{array}{c} ab'x + bb'y + b'c = 0 \\ a'bx + bb'y = 0 \end{array} \right. .$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$(ab' - a'b)x = -b'c$$

Substituindo b' na equação acima de acordo com a expressão (2), segue que:

$$\left(-\frac{a^2 a'}{b} - a'b \right) x = \frac{aa'c}{b}.$$

Logo,

$$x = -\frac{ac}{a^2 + b^2}.$$

Utilizando as equações das retas e a relação (2), obtemos

$$y = \frac{bc}{a^2 + b^2}.$$

Assim, pela fórmula para a distância entre dois pontos, concluímos que a distância do ponto P' à origem P é dada por

$$\begin{aligned} d(P', P) &= \sqrt{\left(-\frac{ac}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{bc}{a^2 + b^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)c^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Por fim, como a distância entre a origem P e a reta r é igual à distância entre os pontos P' e P, temos

$$d(P, r) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3}$$

2 Distância de ponto a reta

Vamos, agora, considerar uma reta r qualquer no plano, com equação $ax + by + c = 0$ e um ponto $P = (x_0, y_0) \notin r$. Para calcular a distância entre P e r vamos movimentar o sistema de eixos de modo que o ponto P passe a ser a origem.

De modo mais preciso, para cada ponto P do plano, com coordenadas (x, y), vamos considerar novas coordenadas (X, Y), dadas por $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$. Assim, o ponto P, de coordenadas (x_0, y_0) passa a ter, no novo sistema, coordenadas $(0, 0)$, ou seja, passa a ser a origem.

Por sua vez, como $x = X + x_0$ e $y = Y + y_0$, a reta r, que no sistema antigo tem equação $ax + by + c = 0$, passa a ter, no sistema novo, equação

$$a(\underbrace{X + x_0}_{x}) + b(\underbrace{Y + y_0}_{y}) + c = 0,$$

isto é,

$$aX + bY + (\underbrace{ax_0 + by_0 + c}_{C}) = 0. \tag{4}$$

Notemos que a reta e o ponto não mudaram de posição. Apenas o sistema de eixos foi trocado por outro. Consequentemente, a distância entre P e r no sistema antigo é igual à distância entre P e r no sistema novo. Porém, no sistema novo, o ponto P é a origem e, como vimos na seção anterior,

$$d(P, r) = \frac{|C|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

onde C é o coeficiente independente da equação (4), ou seja, $C = ax_0 + by_0 + c$. Portanto,

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{5}$$

Os dois exemplos a seguir exercitam o material apresentado acima.

Exemplo 1. *Dados os pontos $A = (1, 2)$, $B = (5, 5)$ e $C = (4, -1)$, calcule o comprimento da altura do triângulo ΔABC relativa ao lado AC.*

Solução. Primeiramente, vamos obter a equação da reta t que passa por A e C. Seu coeficiente angular é dado por

$$m_t = \frac{-1 - 2}{4 - 1} = -1.$$

Assim a equação da reta t é $y - 2 = -(x - 1)$ ou, o que é o mesmo,

$$x + y - 3 = 0.$$

O comprimento da altura relativa ao lado AC é a distância entre o ponto B e a reta t. Utilizando a expressão (5), obtemos

$$d(P,t) = \frac{|1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

□

Exemplo 2. *Dados pontos A e B tais que $AB = 3$, encontre a reta r, não paralela a AB e tal que a soma $d(A;r) + d(B;r)$ seja a menor possível.*

Solução. Escolha um sistema cartesiano no qual $A = (0,0)$ e $B = (3,0)$. Se $r : ax + by + c = 0$ é a equação de r em tal sistema, então o fato de r não ser paralela a AB traduz-se como $a \neq 0$. Agora, segue de (5) que

$$d(A;r) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ \text{ e } \ d(B;r) = \frac{|3a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Portanto, pela desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} d(A;r) + d(B;r) &= \frac{|c| + |3a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c| + |3a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &\geq \frac{|-c + (3a + c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &\geq \frac{|3a|}{\sqrt{a^2}} = 3. \end{aligned}$$

A igualdade ocorrerá somente se tivermos igualdade em todas as desigualdades acima. Em particular, devemos ter $b = 0$, o que implica que a reta r é vertical e, portanto, perpendicular ao segmento AB.

A partir daí, é fácil ver (e isto fica como exercício para o leitor) que a abscissa dos pontos de r deve situar-se de 0 a 3, e qualquer uma tal reta é tal que $d(A;r) + d(B;r) = 3$. □

Dicas para o Professor

Dois encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

É importante que você introduza a noção de distância de ponto a reta de um modo geométrico, explicando que é a distância mínima entre o ponto e um ponto genérico da reta.

O método usado aqui para deduzir a fórmula da distância de ponto a reta é uma boa oportunidade para você introduzir a noção de mudança de coordenadas. No caso, usamos aqui a noção de translação, que também será explorada mais adiante, quando estudarmos a equação geral do círculo. Entretanto, existem outras mudanças de coordenadas importantes, como a rotação em torno de um ponto e a reflexão em torno de uma reta, por exemplo.

Mais sobre o material desta aula pode ser encontrado nas referências elencadas a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.