Material Teórico - Módulo Algoritmo de Euclides Estendido, Relações de Bézout e Equações Diofantinas

Equações Diofantinas (Lineares)

Tópicos Adicionais

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

26 de novembro de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Em um dos exemplos contidos no material "Relação de Bézout e Aplicações" encontramos um par de números inteiros (x,y) tal que $65x + 91y = 39$. Recordando o que fizemos lá, utilizamos o método das divisões sucessivas para encontrar um par de inteiros (m,n) tal que $65m + 91n = 13$ — cuja existência é garantida pela Relação de Bézout — e, a partir daí, multiplicamos ambos os membros dessa igualdade por 3, para obter

$$(65m + 91n) \cdot 3 = 13 \cdot 3 \Longrightarrow 65 \cdot (3m) + 91 \cdot (3n) = 39.$$

Logo, fazendo $x = 3m$ e $y = 3n$, concluímos que

$$65x + 91y = 39.$$

Uma equação do tipo $ax + by = c$, em que a, b e c são números inteiros, é uma **equação diofantina linear**. Se x_0 e y_0 são inteiros tais que $ax_0 + by_0 = c$, dizemos que o par (x_0,y_0) é **solução** da equação diofantina $ax + by = c$.

No teorema seguinte, utilizamos o mesmo raciocínio empregado no exemplo supracitado para obter uma condição necessária e suficiente para que uma equação diofantina linear possua solução. Além disso, o teorema também apresenta uma fórmula que fornece todas as soluções da equação a partir de uma dessas soluções.

Teorema 1. *Sejam a, b e c inteiros positivos e $d = \operatorname{mdc}(a,b)$. Se $d \nmid c$, então a equação diofantina linear $ax + by = c$ não possui solução. Se $d \mid c$, então a equação $ax + by = c$ possui infinitas soluções. Além disso, se (x_0,y_0) for uma solução, então todas as soluções são dadas por*

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases}$$

em que $k \in \mathbb{Z}$.

Prova. Suponha, inicialmente, que a equação $ax + by = c$ tenha uma solução (x_0,y_0). Uma vez que $d \mid a$ e $d \mid b$, as propriedades da relação de divisibilidade garantem que

$d \mid (ax_0 + by_0)$, isto é, $d \mid c$. Dessa forma, concluímos que, se $d \nmid c$, então $ax + by = c$ não possui solução.

Reciprocamente, como $d = \operatorname{mdc}(a,b)$, a Relação de Bézout garante a existência de inteiros m e n tais que $am + bn = d$. Se $d \mid c$, então existe um inteiro q tal que $c = dq$. Assim, multiplicando ambos os membros da igualdade $am + bn = d$ por q, obtemos $(am + bn)q = bq$, ou, o que é o mesmo,

$$a(mq) + b(nq) = c.$$

Portanto, o par (x_0,y_0), em que $x_0 = mq$ e $y_0 = nq$, é uma solução de $ax + by = c$.

Agora, vamos mostrar que todas as soluções de $ax+by = c$ são da forma

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases},$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

De fato, por um lado, se $x = x_0 + \frac{b}{d}k$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}k$, então

$$\begin{aligned} ax + by &= a\left(x_0 + \frac{b}{d}\,k\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}\,k\right) \\ &= ax_0 + \frac{ab}{\cancel{d}}k + by_0 - \frac{ab}{\cancel{d}}k \\ &= ax_0 + by_0 \\ &= c, \end{aligned}$$

pois o par (x_0,y_0) é uma solução. Logo, o par (x,y), em que $x = x_0 + \frac{b}{d}k$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}k$, também é solução de $ax + by = c$.

Por outro lado, seja (x,y) uma solução de $ax + by = c$. Então, temos

$$\begin{aligned} ax + by = ax_0 + by_0 &\Rightarrow ax - ax_0 = by_0 - by \\ &\Rightarrow a(x - x_0) = b(y_0 - y). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da última igualdade acima por d (que é um divisor de a e b), obtemos

$$\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y), \tag{1}$$

de onde concluímos que $\frac{b}{d} \mid \frac{a}{d}(x - x_0)$. Mas, $\text{mdc}\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) = 1$, logo, $\frac{b}{d} \mid (x - x_0)$. Portanto, existe um inteiro k tal que $x - x_0 = \frac{b}{d}\,k$, ou seja,

$$x = x_0 + \frac{b}{d}\,k.$$

Finalmente, substituindo essa expressão para x na última igualdade em (1), segue que

$$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d}k = \frac{b}{d}(y_0 - y).$$

Mas isso é claramente equivalente à igualdade $\frac{a}{d}\,k = y_0 - y$, que, por sua vez, dá a fórmula do enunciado para y. $\square$

Observação 2. O teorema 1 pode ser estendido para inteiros a, b e c não nulos. De fato, podemos estender o conceito de mdc a inteiros não nulos quaisquer, definindo

$$\text{mdc}\,(a,b) = \text{mdc}\,(|a|,|b|).$$

Além disso, podemos "esconder" o sinal de a, b ou c nas incógnitas. Por exemplo, se a for negativo e b e c forem positivos, temos que $ax + by = c \iff -a(-x) + by = c$. Evidentemente, podemos fazer o mesmo com qualquer combinação de sinais para a, b e c.

Exemplo 3. *Decida se a equação diofantina abaixo tem solução. Em caso afirmativo, resolva-a.*

$$35x - 49y = 14.$$

Solução. Calculando $\text{mdc}\,(35, -49) = \text{mdc}\,(35,49)$ pelo método das divisões sucessivas, obtemos

	1	2	2
49	35	14	7
14	7	0	

Daí, $\text{mdc}\,(35,-49) = 7$ e, uma vez que $7 \mid 14$, que é o segundo membro da equação dada, concluímos que ela possui infinitas soluções.

Para encontrar uma dessas soluções, vamos, antes, encontrar inteiros m e n tais que $35m - 49n = 7$. Em seguida, multiplicaremos ambos os membros dessa igualdade por 2, chegando, assim, a uma solução particular de $35x - 49y = 14$. Com efeito, as igualdades do algoritmo das divisões sucessivas nos permitem escrever

$$\begin{aligned} 7 &= 35 - 2 \cdot 14 \\ &= 35 - 2 \cdot (49 - 1 \cdot 35) \\ &= 35 - 2 \cdot 49 + 2 \cdot 35 \\ &= 3 \cdot 35 - 2 \cdot 49 \\ &= 35 \cdot 3 - 49 \cdot 2, \end{aligned}$$

ou seja, $35 \cdot 3 - 49 \cdot 2 = 7$. Agora, multiplicando os dois membros dessa igualdade por 2, ficamos com $2 \cdot (35 \cdot 3 - 49 \cdot 2) = 2 \cdot 7$ ou, o que é o mesmo,

$$35 \cdot 6 - 49 \cdot 4 = 14.$$

Portanto, o par (6,4) é uma solução particular de $35x - 49y = 14$. Por fim, utilizando o teorema 1, concluímos que as soluções dessa equação são dadas por

$$\begin{cases} x = 6 + \frac{-49}{7}k = 6 - 7k \\ y = \ 4 - \frac{35}{7}k = 4 - 5k \end{cases}, \tag{2}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. □

Observação 4. No exemplo 3, podemos encontrar uma solução particular de $35x - 49y = 14$ sem recorrer ao método das divisões sucessivas. Com efeito, basta notar que 14 é a diferença entre 49 e 35, logo, $(x_0,y_0) = (-1, -1)$ é uma solução particular. Desse modo, obtemos soluções

$$\begin{cases} x = -1 + \frac{-49}{7}k = -1 - 7k \\ y = \ -1 - \frac{35}{7}k = -1 - 5k \end{cases} \tag{3}$$

Veja que a solução (6,4), que foi encontrada lá, pode ser obtida aqui fazendo $k = -1$. De outra forma, o inteiro k nas expressões (2) e (3) não é o mesmo.

Agora, apresentamos alguns exemplos de problemas que são modelados por equações diofantinas lineares.

Exemplo 5. *Se Vó Maria contasse as mangas colhidas em seu pomar durante esse fim de semana de* 2 *em* 2*, sobrariam* 1 *manga; se ela contasse as mangas de* 3 *em* 3*, sobrariam* 2*. Sabe-se que foram colhidas mais de* 40 *e menos de* 100 *mangas, e que Vó Maria distribuiu todas as mangas igualmente entre seus* 7 *netinhos, não tendo ficado com nenhuma. Quantas mangas foram colhidas?*

Solução. Vamos denotar por N a quantidade de mangas colhidas. Como restaria 1 manga se as mangas fossem contadas de 2 em 2 e restariam 2 se elas fossem contadas de 3 em 3, existem números inteiros x e y tais que

$$N = 2x + 1 \quad \text{e} \quad N = 3y + 2.$$

Subtraindo membro a membro as duas igualdades acima, concluímos que o par (x,y) é solução da equação diofantina linear $2x - 3y = 1$. Agora, perceba que o par $(x_0,y_0) = (2,1)$ é uma solução de $2x - 3y = 1$. Logo, com o auxílio do teorema 1, vemos que todas as soluções são dadas pelas expressões

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{-3}{1}k = 2 - 3k \\ y = \ 1 - \frac{2}{1}k = 1 - 2k \end{cases}$$

Agora, substituindo $x = 2 - 3k$ em $N = 2x + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} N &= 2(2 - 3k) + 1 \\ &= 4 - 6k + 1 \\ &= 5 - 6k. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
40 < N < 100 &\Leftrightarrow 40 < 5 - 6k < 100 \\
&\Leftrightarrow 35 < -6k < 95 \\
&\Leftrightarrow -35 > 6k > -95 \\
&\Leftrightarrow -\frac{35}{6} > k > -\frac{95}{6}.
\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos $k \in \{-15, -14, -13, \ldots, -6\}$.

Para $k = -15$, temos $N = 5 - 6 \cdot (-15) = 95$; para $k = -14$, temos $N = 5 - 6 \cdot (-14) = 89$; já para $k = -13$, temos $N = 5 - 6 \times (-13) = 83$. Na tabela abaixo, listamos os valores de $N = 5 - 6k$ para todos os valores possíveis de k:

k	-15	-14	-13	-12	-11
N	95	89	83	77	71

k	-10	-9	-8	-7	-6
N	65	59	53	47	41

Como N deve ser múltiplo de 7, pois as mangas foram distribuídas igualmente entre os sete netos de Vó Maria, a única possibilidade é $N = 77$. Portanto, foram colhidas 77 mangas. $\square$

Observação 6. Alternativamente, o exemplo 5 pode ser resolvido do seguinte modo: as condições dadas no enunciado garantem que N deixa resto 1 quando dividido por 2 e resto 2 quando dividido por 3, logo, $N + 1$ deixa resto 0 quando dividido por 2 e por 3; portanto, $N + 1$ é múltiplo de 6. Por outro lado, N é igual à soma das 7 quantidades iguais de mangas dadas aos netos de Vó Maria, logo, é um múltiplo de 7. Desse modo, $N + 1$ é múltiplo de 6 e deixa resto 1 quando dividido por 7, de sorte que basta procurar um número N tal que $40 < N < 100$ e $N + 1$ satisfaz essas condições. Listando os múltiplos de 6 de 42 a 100, temos 42, 48, 54, 60, 61, 66, 72, 78, 84, 90 e 96; dentre eles, somente 78 deixa resto 1 quando dividido por 7. Então, $N + 1 = 78$, logo, $N = 77$.

Exemplo 7. *Numa festa em que compareceram mais homens do que mulheres, o ingresso de cada homem custou R\$ 18,00 e o de cada mulher custou R\$ 12,00. Sabendo que o total arrecadado foi R\$ 1326,00 e que a diferença entre as quantidades de homens e mulheres foi a menor possível, encontre essa diferença.*

Solução. Denotemos por x a quantidade de homens e por y a quantidade de mulheres presentes à festa.

Como o ingresso de cada homem custou R\$ 18,00, o de cada mulher custou R\$ 12,00 e o total arrecadado foi R\$ 1326,00, o par (x,y) é solução da equação diofantina $18x + 12y = 1326$.

É fácil ver que $\operatorname{mdc}(18,12) = 6$. Além disso, também é de simples verificação que $18 \cdot 1 + 12 \cdot (-1) = 6$ e $1326 = 221 \cdot 6$. Assim, multiplicando os dois membros da igualdade $18 \cdot 1 + 12 \cdot (-1) = 6$ por 221, obtemos

$$18 \cdot 221 + 12 \cdot (-221)1 = 1326.$$

Portanto, o par $(x_0,y_0) = (221,-221)$ é uma solução particular da equação $18x + 12y = 1326$. O teorema 1 garante, então, que os x e y inteiros que resolvem e equação $18x+12y = 1326$ são dados por

$$\begin{cases} x = 221 + \frac{12}{6}k = 221 + 2k \\ y = -221 - \frac{18}{3}k = -221 - 3k \end{cases}$$

para algum k inteiro.

Por outro lado, como a quantidade de homens foi maior do que a quantidade de mulheres, temos $x > y$. Entretanto,

$$\begin{aligned} x > y &\iff 221 + 2k > -221 - 3k \\ &\iff 442 > -5k \\ &\iff 5k > -422 \\ &\iff k > -\frac{442}{5} \\ &\iff k > -88{,}4. \end{aligned}$$

Assim, a quantidade de homens é maior do que a quantidade de mulheres se, e somente se, k é um inteiro maior do que $-88{,}4$. Para $k = -88$, obtemos

$$\begin{cases} x = 221 + 2 \cdot (-88) = 45 \\ y = -221 - 3 \cdot (-88) = 43. \end{cases}$$

Fazendo $k = -87$, obtemos

$$\begin{cases} x = 221 + 2 \cdot (-87) = 47 \\ y = -221 - 3 \cdot (-87) = 40. \end{cases}$$

Continuando, é fácil notar que, quando k aumenta 1 unidade, x aumenta 2 unidades e y diminui 3 unidades. Logo, a menor diferença entre as quantidades de homens e mulheres ocorre quando $k = -88$, ou seja, a diferença pedida foi de $45 - 43 = 2$ pessoas. $\square$

Exemplo 8. *Em uma papelaria, o custo de uma impressão em preto e branco é R\$ 0,15 e de uma impressão colorida é R\$ 0,35. Qual o número máximo de impressões feitas em um dia, sabendo que o total arrecadado foi de R\$ 40,00?*

Solução. Denotemos por x a quantidade de impressões em preto e branco e por y a quantidade de impressões coloridas.

Para que sejam arrecadados 40 reais, devemos ter $0{,}15x + 0{,}35y = 40$. Multiplicando os dois membros da última igualdade por 100, obtemos a equação diofantina linear

$$15x + 35y = 4000.$$

Veja que $\operatorname{mdc}(15{,}35) = 5 \mid 4000$. Além disso, $15 \cdot (-2) + 35 \cdot 1 = 5$, logo, multiplicando os dois membros da última igualdade por 800, obtemos $800(15 \cdot (-2) + 35 \cdot 1) = 800 \cdot 5$, ou, o que é o mesmo,

$$15 \cdot (-1600) + 35 \cdot 800 = 4000.$$

Portanto, o par $(x_0{,}y_0) = (-1600{,}800)$ é uma solução particular da equação.

Por outro lado, com o auxílio do teorema 1, concluímos que as soluções inteiras da equação são dadas por

$$\begin{cases} x = -1600 + \frac{35}{5}k = -1600 + 7k \\ y = \quad 800 - \frac{15}{5}k = 800 - 3k \end{cases}$$

O número $x + y$ de impressões será máximo quando o número de impressões coloridas y for mínimo, pois impressões desse tipo são mais caras. Por outro lado, o número y de impressões coloridas deve ser maior ou igual a 0, logo,

$$\begin{aligned} 800 - 3k \geq 0 &\Leftrightarrow 800 \geq 3k \\ &\Leftrightarrow 3k \leq 800 \\ &\Leftrightarrow k \leq \frac{800}{3} \\ &\Leftrightarrow k \leq 266. \end{aligned}$$

Como y diminui à medida que k aumenta, concluímos que o menor valor possível de y ocorre quando $k = 266$. Daí, obtemos

$$\begin{cases} x = -1600 + 7 \cdot 266 = 262 \\ y = \quad 800 - 3 \cdot 266 = 2, \end{cases}$$

de sorte que o número máximo de impressões é $262 + 2 = 264$. $\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Recomendamos que os professores deixem os alunos refletirem sobre os exemplos apresentados por alguns minutos, antes de explicar as soluções. Ressaltamos a importância de que os alunos tentem encontrar as soluções por meios prórpios. Ainda que eles não encontrem uma solução ou apresentem uma solução errada, esse processo é fundamental para a aprendizagem. Explique aos alunos que, às vezes, não é necessário recorrer ao método das divisões sucessivas para encontrar uma solução particular de uma equação diofantina linear, embora esse procedimento sempre permita encontrar uma solução. Nos exemplos 7 e 8, é interessante interpretar as soluções das equações diofantinas como pontos localizados sobre retas no plano cartesiano.

Sugestões de Leitura Complementar

1. J. P. de Oliveira Santos. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.

2. A. C. Muniz Neto. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM, 2022.

3. A. Hefez. *Aritmética*. Rio de Janeiro, SBM, 2014.