Material teórico – Óptica Geométrica II

Características Básicas e Principais Elementos

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Thales Azevedo

Revisor: Lucas Lima

Portal da Física OBMEP

1. Características básicas dos espelhos esféricos

Agora que já estudamos em detalhe os espelhos planos, o próximo passo natural é estudar um outro tipo de espelho, que possui muitas aplicações do dia a dia: os **espelhos esféricos**. De fato, esses espelhos são utilizados em retrovisores de automóveis (por possuírem um campo de visão maior que aquele do espelho plano), equipamentos de dentistas (por serem capazes de produzir uma imagem ampliada do objeto), dentre outros. Conforme veremos, tais espelhos são classificados em dois subtipos, de acordo com a localização da superfície polida, podendo ser **côncavos** ou **convexos**.

Além disso, ao contrário do que acontece com os espelhos planos, nem todo espelho esférico é capaz de gerar uma imagem nítida de um dado objeto. Na verdade, a maioria dos espelhos curvos gera imagens distorcidas (por exemplo, a imagem de um objeto puntiforme é um borrão). Neste texto, nós nos restringiremos ao estudo dos espelhos esféricos que, de fato, geram imagens nítidas, ou seja, aqueles que satisfazem as **condições de nitidez de Gauss**, como discutiremos na próxima seção.

1.1 Conceitos básicos e condições de nitidez de Gauss

Espelhos esféricos têm a forma de calotas esféricas, ou seja, o formato obtido ao seccionarmos uma esfera usando um plano, como ilustra a figura 1. Como mencionamos na introdução, esse tipo de espelho não é capaz, em geral, de gerar imagens nítidas de objetos. Antes de elencar as condições necessárias para que um espelho esférico gere imagens nítidas, precisamos definir alguns conceitos básicos relacionados.

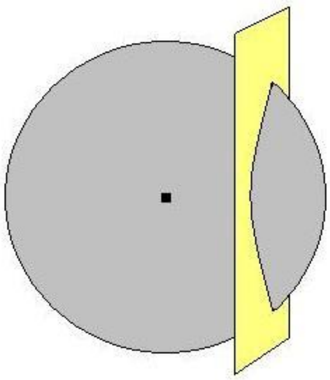

Figura 1: Esfera seccionada por um plano, dando origem a duas calotas esféricas.

Na figura 2, temos a representação da vista lateral de um espelho esférico de *centro de curvatura* C, *raio de curvatura r* e *vértice* V. O centro e o raio do espelho são determinados a partir da esfera cuja seção (teoricamente) deu origem ao espelho. Já o vértice V é definido como o ponto em que o eixo de simetria do espelho o atravessa. O eixo de simetria, que passa pelos pontos C e V, recebe o nome de *eixo principal* do espelho. Por fim, representamos o *ângulo de abertura* do espelho, denotado por α, definido como o ângulo formado pelos raios que tangenciam o espelho em suas extremidades (como, por exemplo, os pontos A e B na figura 2).

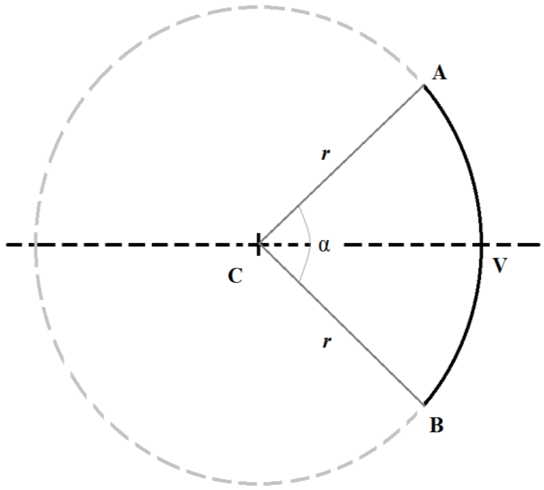

Figura 2: Elementos associados a um espelho esférico (vista lateral).

Agora que já conhecemos os elementos básicos que definem um espelho esférico, podemos enunciar as condições necessárias para que as imagens formadas pelo espelho sejam nítidas. São elas:

- Os raios luminosos que incidem no espelho devem ser paralelos ou muito pouco inclinados em relação ao eixo principal, além de estarem próximos ao eixo;
- Relacionado com o ponto acima, também é necessário que o ângulo de abertura do espelho seja bem pequeno, inferior a 10°, ou seja, $\alpha < 10°$.

Essas condições foram determinadas pelo matemático, astrônomo e físico alemão Johann Carl Friedrich Gauss e, portanto, recebem o nome de *condições de nitidez de Gauss*. Os espelhos que satisfazem tais condições são chamados *espelhos esféricos de Gauss*. No restante dos nossos estudos, vamos sempre supor implicitamente que os espelhos analisados satisfazem as condições de Gauss, a menos que o contrário seja dito.

1.2 Reflexão nos espelhos esféricos côncavo e convexo

Vimos que os espelhos esféricos correspondem a calotas esféricas, como ilustrado na figura 1. Além disso, a superfície polida do espelho pode corresponder à parte de dentro da calota ou à parte de fora. Cada caso leva a um subtipo diferente de espelho esférico, com propriedades bastante diferentes.

Se a superfície polida está do lado de dentro da calota, dizemos que o espelho é *côncavo* (veja a figura 3.a). Se, ao contrário, a superfície polida está do lado de fora da calota, o espelho é dito convexo (veja a figura 3.b). Em ambos os casos, indicamos o lado não polido do espelho com pequenos traços paralelos, da mesma maneira que fazemos com espelhos planos.

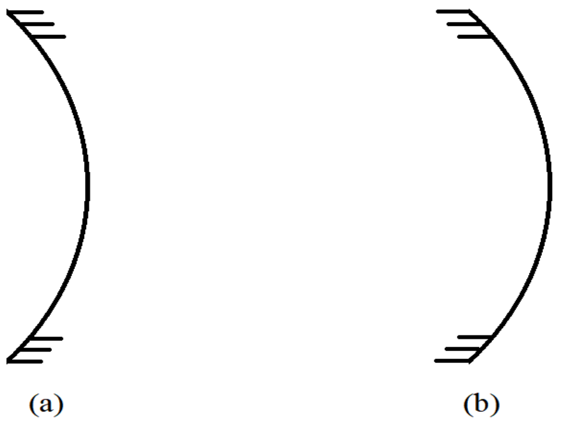

Figura 3: (a) Representação de um espelho esférico côncavo.

(b) Representação de um espelho esférico convexo.

Vamos agora analisar a reflexão de um raio luminoso por um espelho esférico. Naturalmente, devem ser obedecidas as mesmas leis da reflexão que estudamos anteriormente. Em particular, o ângulo de incidência, medido entre o raio incidente e a normal, deve ser igual ao ângulo de reflexão, medido entre o raio refletido e a normal. Mas como obtemos a normal?

Para traçarmos a normal em um espelho curvo, primeiro traçamos a reta tangente ao espelho no ponto de incidência do raio luminoso (note que, no caso do espelho plano, a tangente confunde-se com o próprio espelho). Depois, traçamos a reta perpendicular àquela tangente que passa pelo ponto de incidência. Essa reta corresponderá à normal naquele ponto.

As figuras 4 e 5, abaixo, mostram uma representação da reflexão de um raio luminoso em um espelho côncavo e em um espelho convexo, respectivamente. Nelas, **t** denota a reta tangente ao espelho no ponto de incidência, enquanto **n** denota a reta normal, perpendicular àquela.

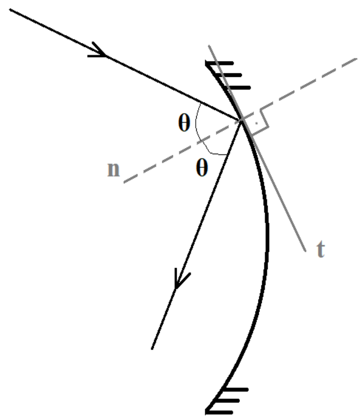

Figura 4: Representação da reflexão de um raio luminoso por um espelho côncavo.

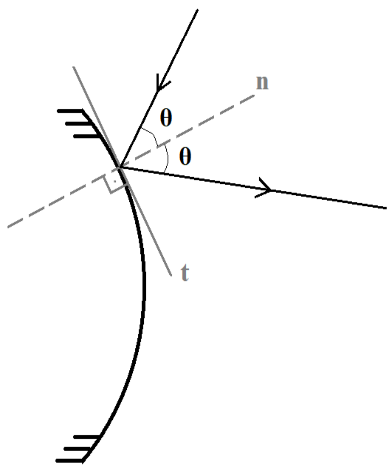

Figura 5: Representação da reflexão de um raio luminoso por um espelho convexo.

Note que essas reflexões dão-se como se os espelhos fossem planos na vizinhança do ponto de incidência. De fato, toda superfície curva é localmente plana, no sentido em que é bem aproximada por um plano em regiões de tamanhos típicos muito menores que o raio de curvatura. É a mesma ideia por trás de a Terra parecer plana no nosso quotidiano, embora seja aproximadamente esférica (as distâncias típicas envolvidas no nosso dia a dia são bem menores que o raio da Terra).

2. Foco principal dos espelhos esféricos e os raios particulares

Nesta seção, continuaremos o estudo dos espelhos esféricos, iniciado na seção anterior. Em particular, introduziremos o conceito de **foco principal** de um espelho esférico, determinando a sua posição nos espelhos côncavo e convexo. Uma vez concluída essa discussão, partiremos então para a apresentação de alguns **raios particulares** que incidem sobre os espelhos esféricos, e que são essenciais para compreender a formação de imagens nesses espelhos, conforme veremos mais adiante.

2.1 Determinação do foco principal de um espelho esférico

Verifica-se experimentalmente (abaixo veremos teoricamente por que isso ocorre) que os espelhos esféricos que satisfazem as condições de nitidez de Gauss apresentam uma propriedade muito interessante. Quando um conjunto de raios luminosos incide no espelho paralelamente ao seu eixo principal, ou seja, o eixo que passa pelo centro de curvatura e o vértice, todos os raios refletidos ou *convergem* para um mesmo ponto (no caso do espelho *côncavo*), ou *divergem* a partir de um mesmo ponto (no caso do espelho *convexo*). As figuras 6 e 7, abaixo, ilustram esse fenômeno. Em ambos os casos, aquele ponto especial, localizado no eixo principal do espelho, recebe o nome de *foco principal do espelho esférico*. (Note que nessas figuras representamos os espelhos esféricos como segmentos de reta, pois espelhos que satisfazem as condições de nitidez de Gauss apresentam pouca curvatura.)

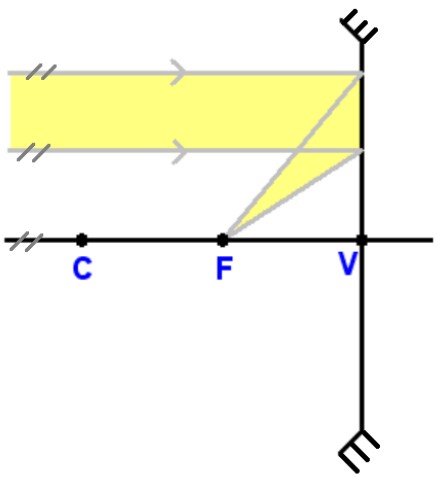

Figura 6: Feixe de raios paralelos ao eixo principal convergindo para o foco principal (**F**) de um espelho *côncavo* após serem refletidos. Note que todos os raios cruzam-se naquele mesmo ponto após a reflexão no espelho.

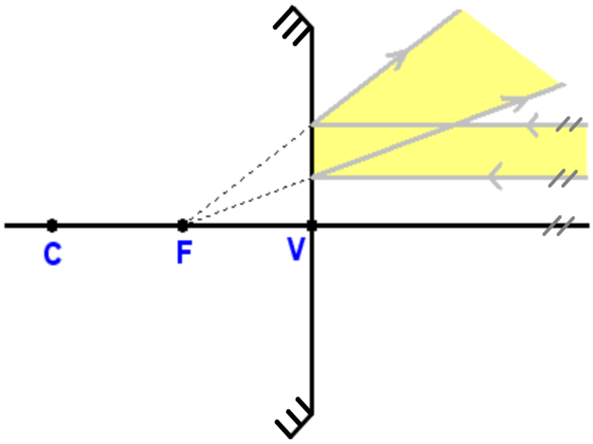

Figura 7: Feixe de raios paralelos ao eixo principal, sofrendo reflexão em um espelho *convexo*. Note que os *prolongamentos* dos raios refletidos cruzam-se no mesmo ponto, o foco principal do espelho, denotado por **F**.

Vimos que o foco principal está localizado sobre o eixo principal do espelho esférico, entre seu centro de curvatura e seu vértice. Gostaríamos, agora, de determinar mais precisamente a sua posição. Por exemplo, podemos perguntar a que distância x do centro de curvatura encontra-se o foco principal.

Comecemos investigando o foco principal de um espelho côncavo de raio r. Para determinar a sua posição, basta analisar a reflexão de um único raio luminoso, incidindo paralelamente ao eixo principal. Tal situação está representada na figura 8. (Note que, agora, voltamos a representar na figura a curvatura do espelho esférico, para fazer um tratamento mais preciso.)

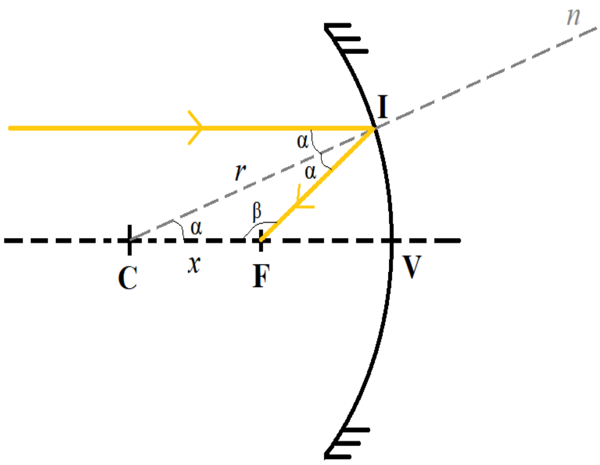

Figura 8: Raio luminoso incidindo em um espelho *côncavo* de raio r, paralelamente ao seu eixo principal, e sendo refletido pelo mesmo.

Como o espelho é esférico, a reta normal à superfície refletora no ponto de incidência I é a reta que passa por I e pelo centro de curvatura C. Isso nos permite concluir que os ângulos de incidência e reflexão e o ângulo com vértice em C têm todos a mesma medida, que chamamos de α na figura 8. Portanto, sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo dá 180°, concluímos que o ângulo β, com vértice no foco principal F, mede

$$\beta = 180° - 2\alpha.$$

Para determinar a distância x entre C e F, podemos então empregar a Lei dos Senos, da Trigonometria, segundo a qual a razão entre o seno de um ângulo interno de um triângulo e o comprimento do lado oposto a tal ângulo é constante para todos os ângulos internos daquele triângulo. De fato, aplicando esse resultado ao triângulo CFI, obtemos

$$\frac{sin(\beta)}{CI} = \frac{sin(\alpha)}{CF}$$

$$\frac{sin(180° - 2\alpha)}{r} = \frac{sin(\alpha)}{x},$$

ou seja,

$$xsin(180° - 2\alpha) = rsin(\alpha).$$

Agora, vamos precisar de mais dois resultados vindos da Trigonometria. O primeiro diz que, para qualquer ângulo θ, temos $sin(180° - \theta) = sin(\theta)$, o que pode ser observado diretamente no círculo trigonométrico. O segundo é a conhecida fórmula do seno do arco duplo: $sin(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)$. Note que ambos os resultados podem ser obtidos através de aplicações da fórmula

$$sin(a \pm b) = sin(a)cos(b) \pm sin(b)cos(a).$$

Voltando à equação para x, decorrente da Lei dos Senos, e usando esses resultados, ficamos com

$$xsin(2\alpha) = rsin(\alpha)$$

$$2xsin(\alpha)cos(\alpha) = rsin(\alpha)$$

$$2xcos(\alpha) = r.$$

Finalmente, podemos simplificar essa equação, lembrando que o espelho em questão satisfaz as condições de nitidez de Gauss e, em particular, α é um ângulo muito pequeno, menor que 5°. Portanto, cos(α) é aproximadamente igual a 1 (verifique isso usando uma calculadora!). Sendo assim, temos

$$2x \approx r$$

$$x \approx \frac{r}{2}$$

e concluímos que o foco principal de um espelho côncavo está localizado sobre o eixo principal do espelho, equidistante do seu centro de curvatura e do seu vértice. Note que, como x não depende de α, todos os raios que incidem paralelamente ao eixo principal o cruzam no mesmo ponto, motivo pelo qual esse ponto é chamado de foco principal.

Para o espelho convexo, a análise é essencialmente idêntica à que acabamos de fazer para o espelho côncavo. De fato, como mostrado na figura 9, a análise da reflexão de um raio luminoso que incide paralelamente ao eixo principal de um espelho convexo leva à construção do mesmo triângulo CFI que tínhamos antes. Assim, repetindo os passos anteriores, chegamos à conclusão de que, também no espelho convexo, o foco principal está localizado sobre o eixo principal e equidistante do centro de curvatura e do vértice.

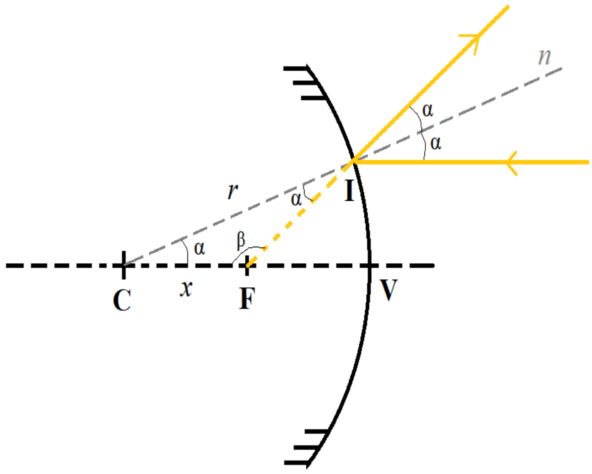

Figura 9: Raio luminoso incidindo em um espelho *convexo* de raio r, paralelamente ao seu eixo principal, e sendo refletido pelo mesmo.

2.2 Reflexão de raios particulares nos espelhos esféricos

Para compreender a formação de imagens nos espelhos esféricos, é importante conhecer o comportamento de alguns raios particulares ao serem refletidos por aqueles espelhos. Esses são os raios incidentes que passam (ou cujos prolongamentos passam) por um dos três pontos especiais do espelho esférico: o centro de curvatura, o foco principal ou o vértice. Apresentamos abaixo uma tabela com um resumo dos raios particulares e seu comportamento, após sofrerem reflexão.

Raio incidente (ou seu prolongamento) passa pelo:	**Raio é refletido:**
Centro de curvatura	Na mesma direção do raio incidente.
Foco principal	Paralelo ao eixo principal.
Vértice	Em uma direção que faz o mesmo ângulo com o eixo principal.

Tabela 1: Resumo do comportamento dos raios particulares sob uma reflexão.

Repare que o comportamento do raio incidente que passa (ou cujo prolongamento passa) pelo foco principal poderia ser antevisto, de acordo com o princípio da reversibilidade dos raios luminosos. De fato, como já tínhamos visto que raios que incidem paralelamente ao eixo principal são refletidos na direção do foco, então aquele princípio garante o comportamento apresentado na terceira linha da tabela.

Por fim, as figuras abaixo ilustram a reflexão dos raios particulares nos casos dos espelhos esféricos côncavo e convexo.

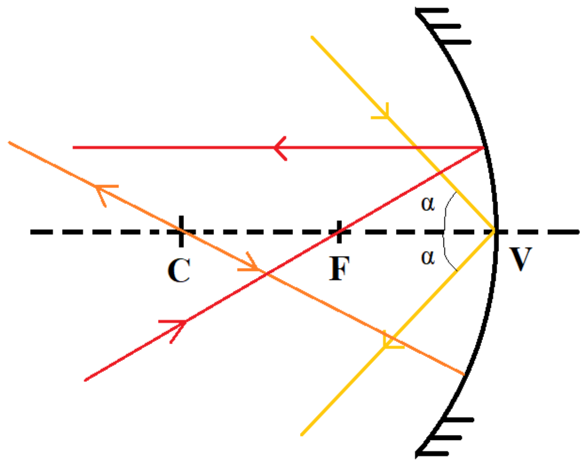

Figura 10: Raios particulares sendo refletidos por um espelho côncavo.

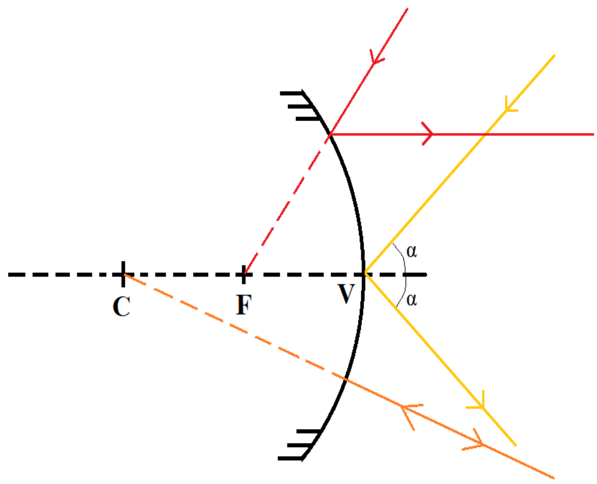

Figura 11: Raios particulares sendo refletidos por um espelho convexo.

3. Referências

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Espelho_esf%C3%A9rico

(Figura 1, acesso em 23/10/2020)

[2] https://pt.wikipedia.org/wiki/Espelho_esf%C3%A9rico

(Figuras 6 e 7, adaptadas, acesso em 29/10/2020)