Material Teórico - Módulo de Princípios Básicos de Contagem

Princípio Fundamental da Contagem

Segundo Ano do Ensino Médio

Prof. Fabrício Siqueira Benevides

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 O Princípio Fundamental da Contagem

Frequentemente estamos interessados em contar o número de maneiras em que determinadas ações podem ser executadas. De quantas maneiras podemos nos vestir? De quantas formas podemos viajar de uma cidade para outra? De quantas formas podemos combinar as opções de comida para montar o cardápio de um jantar? Uma maneira simples de contar é fazer uma lista com todas as possibilidades e contá-las uma a uma. Contudo, isso é pouco eficiente e é muito comum que o número de possibilidades seja tão grande que isso se torna até impossível. Por exemplo, de quantas formas podemos escolher as três letras e os quatro números para montar uma placa de carro? Ou como calcular o número de maneiras de preencher um cartão da Mega-Sena?

Há métodos eficientes de realizarmos esses tipos de contagens, e apresentaremos alguns deles ao longo desta e das próximas aulas. A grande maioria desses métodos baseia-se, direta ou indiretamente, no chamado "Princípio Fundamental da Contagem". Comecemos com um exemplo ilustrativo desse princípio.

Digamos que você possui 3 camisas e 2 calças sociais. De quantas maneiras diferentes você pode se vestir (escolhendo exatamente uma das camisas e uma das calças)? Veja que você vai executar duas ações: (i) escolher a camisa; (ii) escolher a calça. A ação (i) pode ser executada de 3 maneiras diferentes e, *para cada uma dessas maneiras*, você poderá executar a ação (ii) de 2 maneiras diferentes. Dessa forma, o número total de maneiras de executar ambas as ações será $3 \cdot 2 = 6$. Uma método simples para visualizar todas as possíveis sequências de ações ou escolhas tomadas é construindo uma **árvore de decisão**, como a da Figura 1: no *nível zero*, também chamado de **raiz** da árvore, ainda não tomamos qualquer decisão; no primeiro nível indicamos as possíveis escolhas para a camisa e, no segundo nível, indicamos as opções de calça para cada uma das possíveis camisas escolhidas no primeiro nível. O número total de elementos no último nível indica a resposta da pergunta inicial, ou seja, representa o total de maneiras de executar a sequência de ações em questão. Além disso, cada caminho, da raiz até um elemento do último nível corresponde a uma sequência de ações que pode ser executada. Neste exemplo, temos 6 elementos no nível final, o que coincide com a resposta que havíamos dado anteriormente.

Observe que, ao desenhar uma árvore de decisão, também estamos listando todas as maneiras de realizar as ações. Mas estamos fazendo isso de uma forma organizada. No exemplo a seguir, não iremos desenhar a árvore por falta de espaço, mas sugerimos que o leitor a desenhe.

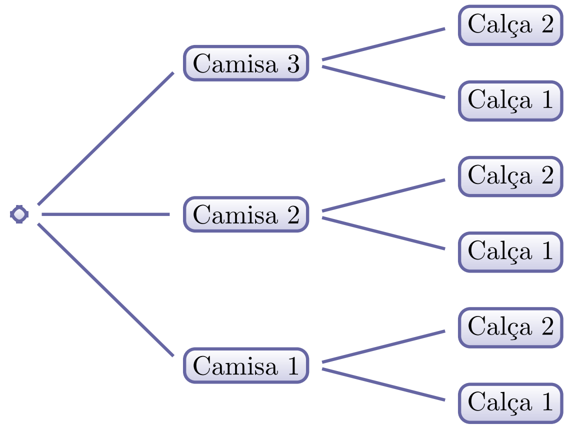

Figura 1: Uma árvore de decisão na qual se considera duas perguntas: (i) "qual camisa vestir" e (ii) "qual calça vestir" (após escolher a camisa).

Exemplo 1. *Para montar um sanduíche em uma lanchonete, o cliente deve escolher exatamente um tipo pão, um tipo de carne e um tipo de queijo. Sabe-se que existem três opções para o pão (baguete, pão de forma ou pão árabe), duas opções para a carne (hambúrguer ou frango) e três opções para o queijo (mussarela, cheddar ou suíço). Calcule quantos sanduíches diferentes é possível montar?*

Solução. Veja que o cliente precisará tomar 3 decisões: (i) escolher o tipo de pão; (ii) escolher o tipo de recheio; (iii) escolher o tipo de queijo. Há 3 possibilidades para a escolha do pão e, *para cada uma delas*, há 2 possibilidades para a escolha da carne. Além disso, agora, *para cada uma dessas* $2 \cdot 3$ possibilidades para escolha de pão e carne, há ainda 3 possibilidades para a escolha do queijo. Isso totaliza $(2 \cdot 3) \cdot 3 = 18$ maneiras de montar o sanduíche. □

O Princípio Fundamental da Contagem generaliza os raciocínios acima para situações onde duas ou mais ações ou escolhas precisem ser executadas[1].

> Se desejamos executar uma sequência de n ações, onde a primeira ação pode ser executada de m_1 maneiras, a segunda de m_2 maneiras e assim sucessivamente, até que a n-ésima ação pode ser executada de m_n maneiras, então o número total de maneiras de executar essa sequência de ações é igual ao produto $m_1 m_2 \ldots m_n$.

Devido à sua própria formulação, o Princípio Fundamental da Contagem também é, muitas vezes, chamado de *Princípio Multiplicativo*.

Veja que, no Exemplo 1, tivemos que realizar 3 ações, portando $n = 3$. Além disso, tínhamos que $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ e $m_3 = 3$, e portanto o número total de maneiras de realizar todas as ações (e montar o sanduíche) é, pelo Princípio

[1] No que segue, nos referiremos ao *passo n* de uma sequência de ações como o $n-$*ésimo* passo.

Fundamental da Contagem, igual a $m_1m_2m_3 = 2{\cdot}3{\cdot}3 = 18$, conforme havíamos calculado anteriormente.

Uma dica importante: para realizar uma contagem qualquer, uma estratégia interessante é nos colocarmos na posição da pessoa que está realizando as ações ou escolhas envolvidas. E, no caso em que queremos contar o número de objetos de um certo conjunto, devemos sempre nos perguntar qual a sequência de ações que devemos realizar para construir ou selecionar, de maneira única, cada um dos possíveis objetos do conjunto. Por exemplo, para montar o sanduíche do exemplo anterior, as ações eram: escolher o pão, escolher a carne e escolher o queijo.

No exemplo a seguir, já temos uma situação onde é impraticável listar todas as soluções, ou mesmo desenhar toda a árvore de decisão (mas ainda é possível imaginá-la).

Exemplo 2. *De quantas formas podemos escolher os símbolos de uma placa de carro, sabendo que ela deve ser composta por 3 letras (escolhidas de um alfabeto com um total de 26 letras) e 4 dígitos (cada um no intervalo de 0 a 9)?*

Solução. Vamos nos colocar na posição de alguém que está montando a placa. Para montá-la é preciso fazer sete ações independentes. As ações consistem em escolher qual será: (1) a primeira letra, (2) a segunda letra, (3) a terceira letra, (4) o primeiro dígito, (5) o segundo dígito, (6) o terceiro dígito, (7) o quarto dígito. Se $m_1, m_2, \ldots, m_7$ denotam as quantidades de símbolos disponíveis para realizarmos as ações $1, 2, \ldots, 7$, respectivamente, então temos que $m_1 = m_2 = m_3 = 26$ e $m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = 10$. Dessa forma, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número total de maneiras de executar todas essas escolhas é igual a $m_1m_2 \ldots m_7 = 26^3 \cdot 10^4 = 175.760.000$. □

Observe que, para usar o Princípio Fundamental da Contagem, precisamos organizar as ações ou escolhas que devemos tomar ou fazer de modo que seja possível calcular facilmente o número de maneiras de executar a i-ésima ação (nas notações do exemplo acima, o valor de m_i), sem que esse número dependa das escolhas executadas anteriormente. Fizemos isso já no Exemplo 2, quando o número de possíveis escolhas para a segunda letra não dependeu da primeira letra escolhida, e assim sucessivamente. Vejamos outras situações, cada vez mais elaboradas.

Exemplo 3. *Quantos são os números naturais de* 200 *a* 999*, tais que todos os seus algarismos:*

(a) pertencem ao conjunto $A = \{1, 4, 7, 9\}$*?*

(b) pertencem ao conjunto $A = \{1, 4, 7, 9\}$ *e são distintos?*

Solução. (a) Para formar o número de 3 algarismos precisamos tomar apenas 3 decisões: (i) qual será seu algarismo da casa das centenas, (ii) qual será seu algarismo da casa das dezenas, (iii) qual será seu algarismo das unidades. Como devemos montar um número de 200 a 999, seu algarismo das centenas não poderá ser igual a 1; e, como todos os algarismos devem pertencer ao conjunto A, temos apenas três possíveis valores (4, 7 ou 9) para o dígito da centenas. Assim, $m_1 = 3$. Por outro lado, os dígitos das dezenas e das unidades podem ser quaisquer elementos de A, de forma que $m_2 = m_3 = 4$. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, a quantidade de maneiras de formar um número com as propriedades indicadas é igual a $m_1m_2m_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

(b) Vejamos, agora, como responder à segunda pergunta. Temos que tomar as mesmas decisões (i), (ii) e (iii) do item anterior, com a restrição adicional de que não podemos escolher um mesmo algarismo duas vezes. A árvore de decisão da Figura 2 indica todas as possíveis escolhas para cada algarismo; a partir dela, podemos facilmente observar que existem 18 possíveis valores para o número pedido (um valor correspondendo a cada caminho, da raiz ao nível final). Mas, gostaríamos de resolver esse problema diretamente, usando o Princípio Fundamental da Contagem. Para tanto, veja que, como antes, temos $m_1 = 3$ possíveis escolhas para o algarismo das centenas. Entretanto, ao escolhermos o algarismos das dezenas, temos que tomar o cuidado para que esse algarismo seja diferente do algarismo das centenas, agora já escolhido. Sendo assim, dos 4 possíveis elementos de A, apenas 3 deles podem ser usados (temos que descontar aquele elemento que já foi escolhido como algarismo das centenas!). Portanto, $m_2 = 3$. Prosseguindo com esse raciocínio, vemos que existem 2 possibilidades para o algarismo das unidades, pois este deve pertencer a A e deve ser diferente dos outros dois algarismos já escolhidos. Logo, $m_3 = 2$. Concluímos, então, que a quantidade de números que podemos formar é $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. □

Observe na Figura 2 que, após escolhermos o algarismo das centenas (4, 7 ou 9), os 3 possíveis algarismos que ainda podem ser usados na casa das dezenas mudam, de acordo com o algarismo escolhido para as centenas (e cuja escolha não pode ser repetida). Não há qualquer problema com isso, mas é muito importante que, em cada caso, *a quantidade de escolhas* permanece a mesma. Ou seja, o valor de m_2 é igual a 3, independentemente de qual número seja escolhido para as centenas. Do mesmo modo, o número de possíveis escolhas para o algarismo das unidades é *sempre* 2. Por isso, $m_3 = 2$. É essa *constância do número de possibilidades* que nos permite utilizar o Princípio Multiplicativo.

2 Tente não adiar dificuldades!

O título dessa seção é talvez o melhor conselho que você pode receber ao tentar resolver um problema de contagem. Mas o que queremos dizer com isso, exatamente? Como vimos na seção anterior, ao realizar uma contagem nós

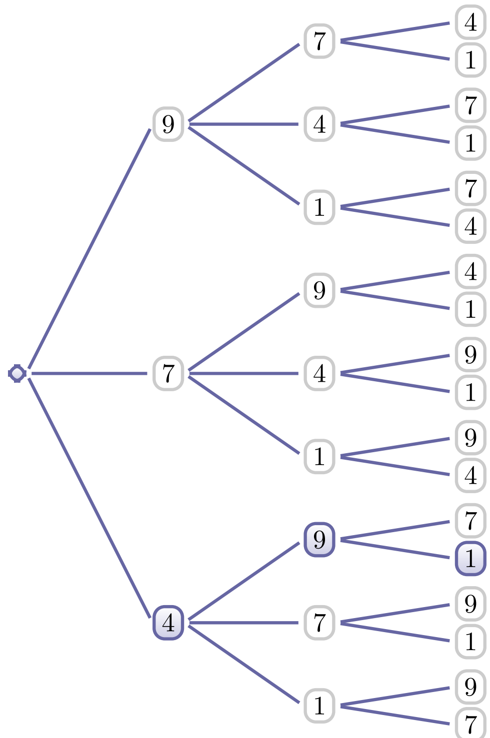

Figura 2: Uma árvore de decisão com três níveis. O caminho marcado da esquerda para a direita indica uma das 18 possíveis escolhas para o número do item (b) do Exemplo 3. Nesse caminho, tomamos o número 4 como algarismo da casa das centenas, o 9 para a casa das dezenas e o 1 para as unidades, de forma que montamos o número 491.

devemos listar uma sequência de ações ou escolhas que determinam os objetos a serem contados. Nosso conselho é: sempre que possível, realize primeiro as ações mais difíceis, ou seja, aquelas que estão sujeitas a um maior número de restrições. Ao realizar uma contagem, pequenas dificuldades podem rapidamente se tornar grandes problemas.

Isso é exatamente o que vínhamos fazendo ao longo da última seção, mas não havíamos ainda chamado explicitamente a atenção do leitor. Considere, por exemplo, novamente o problema do Exemplo 3, item (b). Em nossa solução, decidimos escolher primeiro o algarismo das centenas, em seguida o das dezenas e por fim o das unidades. O motivo pelo qual fizemos isso não foi simplesmente pelo fato desta ser a ordem natural de se escrever um número. O motivo foi porque, em nosso problema, a escolha do algarismo das centenas era a mais restrita: lembre-se de que, além de ser diferente dos demais, ele não podia ser igual a 1.

Como um rápido exercício, vejamos o que teria acontecido se tivéssemos tentado construir nosso número escolhendo primeiro o dígito das unidades, seguido pelo das dezenas e, depois, o das centenas. Executando as ações nessa ordem, a única restrição sobre o dígito das unidades é que ele deve pertencer ao conjunto $A = \{1, 4, 7, 9\}$. Logo, há quatro possíveis escolhas para ele, ou seja, $m_1 = 4$. Feito isso, há três possibilidades para o algarismo das dezenas (pois ele deve pertencer a A e deve ser diferente do algarismo das unidades). Logo, $m_2 = 3$. Mas quantas possíveis escolhas temos, agora, para o algarismo das centenas? A resposta é: depende! Tal algarismo deve ser diferente de 1 e diferente dos dois algarismos já escolhidos. Sendo assim, *caso* o algarismo 1 já tenha sido usado, temos dois possíveis valores sobrando para o algarismo das centenas; por outro lado, *caso* o 1 não tenha sido escolhido, temos apenas um possível valor (pois o algarismo das centenas deve ser diferente de 1, diferente do algarismo escolhido para as unidades e diferente do escolhido para as dezenas). Dessa forma, não é possível definir um valor para m_3 e, portanto, não podemos usar o Princípio Multiplicativo. Ainda assim, podemos terminar de resolver o problema analisando o que acontece caso a caso com uma árvore de decisão, como na Figura 3. Pela árvore, vemos que existem 18 possíveis

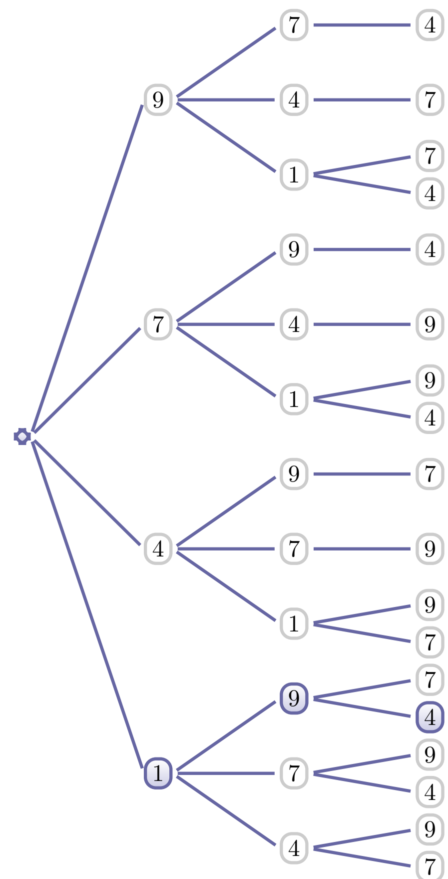

Figura 3: Outra árvore de decisão que resolve a pergunta do Exemplo 3, item (b). Agora, escolhemos primeiro o dígito das unidades, seguido do dígito das dezenas e, por fim, do das centenas. Dessa forma, o caminho marcado corresponde ao número 491. Veja que essa escolha torna a árvore menos regular.

números, mas essa solução é bem mais difícil que a original. Em situações mais complicadas, talvez sequer seja possível terminar de realizar a contagem se escolhermos de maneira errada por onde começar.

Vejamos um exemplo bastante interessante do tipo de situação descrita acima.

Exemplo 4. *Quantas são as sequências* $(a_1, a_2, \ldots, a_7)$*, de números naturais distintos e tais que, para cada* i *de* 1 *a* 7*, tenhamos* $i \leq a_i \leq 9$*?*

Solução. Vamos contar a quantidade de tais sequências calculando, para cada $i = 1, 2, \ldots, 7$, a quantidade de valores que a_i pode assumir. Lembre-se de que a_1, a_2, $\ldots$, a_7 devem ser distintos; portanto, os valores que a_i pode assumir dependerão de quais outros valores já foram atribuídos para as variáveis já escolhidas. Precisamos, então, *escolher uma ordem para as escolhas que iremos realizar* (ou seja, decidir qual a_i escolheremos primeiro). Veja que a variável com o conjunto de possíveis valores mais restrito é a_7 (como deve ser $7 \leq a_7 \leq 9$, a_7 só pode ser igual a 7, 8 ou 9), seguida pelas variáveis a_6, a_5, $\ldots$, a_1, nessa ordem. Sendo assim, essa será a ordem que utilizaremos para as escolhas.

Como acabamos de ver, existem 3 possíveis valores para a_7. Tendo escolhido a_7, veja que, dos 4 valores inicialmente disponíveis para a_6, um já foi usado por a_7 (pois $\{7, 8, 9\} \subset \{6, 7, 8, 9\}$). Logo, temos apenas 3 possíveis valores ainda disponíveis para a_6. De modo análogo, ao escolher a_5, dos 5 valores inicialmente disponíveis, um deles foi usado por a_6 e outro por a_7 e, portanto, há apenas 3 valores ainda disponíveis para a_5. Seguindo esse raciocínio, vemos que há apenas 3 valores disponíveis para cada uma das variáveis seguintes, no momento de suas escolhas. Dessa forma, $m_1 = \ldots = m_7 = 3$ e, pelo Princípio Fundamental da Contagem, concluímos que há um total de $3^7 = 2187$ escolhas para a sequência de variáveis $(a_1, a_2, \ldots, a_7)$. $\square$

É instrutivo analisar o que aconteceria se tentássemos escolher primeiro o valor de a_1, seguido por $a_2, \ldots, a_7$, nesta ordem. O início é fácil: como nenhum outro valor foi escolhido, a_1 poderia assumir qualquer valor de 1 a 9; portanto, há 9 possíveis escolhas para a_1, ou seja, $m_1 = 9$. O problema surge agora: o número de possibilidades para a_2 depende do valor escolhido para a_1. Se $a_1 = 1$, então ainda existirão 8 possíveis valores para a_2 (qualquer um dos números de 2 a 9); mas, se $a_1 \neq 1$, então uma das 8 possibilidades iniciais para a_2 foi usa para a_1, de modo que restarão apenas 7 possíveis valores para a_2. Dessa forma, não conseguimos sequer definir o valor de m_2.

Como veremos na seção seguinte, a princípio poderíamos resolver o impasse a que chegamos no parágrafo anterior dividindo o problema em dois casos e tratando cada caso separadamente. Contudo, a cada nova variável adicionada o problema irá ficar cada vez mais complicado: ao tentar escolher o valor de a_i, o número de escolhas ainda admissíveis para ele dependerá da quantidade de números de i a 9 que já foram utilizados por alguma das variáveis $a_1, \ldots, a_{i-1}$. A conclusão é: tentado resolver os casos mais simples primeiro, acabamos criando um problema bem mais difícil que o original. (Nesse caso, praticamente intransponível!)

3 Dividindo em casos

Ao realizar uma contagem, muitas vezes ocorre de não ser possível aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo. Isso acontece quando nossa árvore de decisão é *assimétrica*, ou seja, quando a quantidade de escolhas para um certa ação muda de acordo com as ações tomadas anteriormente (como na Figura 3). Em uma situação como essa, um ótima ideia é tentar dividir o problema em vários casos. Vejamos um exemplo.

Exemplo 5. *Digamos que você deseja comprar um computador, mas está em dúvida sobre qual marca, modelo e cor irá escolher. Há apenas duas marcas, que chamaremos de Marca* A *e Marca* B*, pelas quais você se interessa. A Marca* A *tem à disposição três modelos e cada um desses pode ser comprado em quatro possíveis cores. Já a Marca* B *oferece dois modelos, tais que, para cada um, há duas possíveis escolhas de cor. De quantas maneiras diferentes você pode realizar a compra?*

Solução. Veja que temos que tomar três decisões: (i) a marca, (ii) o modelo, (iii) a cor. Contudo, diferentemente dos exemplos das seções anteriores, *não* é verdade que, para cada possível marca, o número de modelos e cores disponíveis será o mesmo. Aqui, o que podemos observar é que o problema se divide naturalmente em dois casos:

(i) ou compraremos um computador da Marca A;

(ii) ou compraremos um computador da Marca B.

Se decidirmos comprar um computador da Marca A, teremos, pelo Princípio Fundamental Contagem, $3 \cdot 4 = 12$ possíveis escolhas para o modelo e a cor. Já se comprarmos um computador da Marca B, teremos, de forma semelhante, $2 \cdot 2 = 4$ possíveis escolhas para o modelo e a cor. Note que as ações "comprar da Marca A" ou "comprar da Marca B" não irão ser executadas de forma sequencial. Na verdade, elas são ações *excludentes* (i.e., a opção por uma delas exclui a outra), de forma que iremos executar exatamente uma delas: ou iremos comprar uma das 12 opções oferecidas pela Marca A ou uma das 4 oferecidas pela Marca B. Sendo esse o caso, fica claro que devemos *somar* os valores 12 e 4. O resultado é que existem 16 maneiras de realizar a compra. $\square$

Podemos resumir a técnica adotada na solução do exemplo anterior, conhecida como o **Princípio Aditivo**, da seguinte maneira.

> Ao dividir um problema de contagem em casos, onde dentro de cada caso contamos o número de soluções que nele se enquadram e todas as soluções se enquadram em *exatamente um* dos casos, o número total de soluções é igual à soma dos números de soluções de cada caso.

Veja que há dois pontos bastante importantes ao particionar um problema em casos:

1. Toda solução possível deve ser coberta por (i.e., deve enquadrar-se em) algum dos casos. (Ou seja, você deve certificar-se de que, com a divisão em casos que escolheu, você contou todas as possíveis soluções.)

2. Não pode haver nenhuma solução que seja coberta por (i.e., se enquadre em) mais de um dos casos. (Ou seja, a divisão em casos que você escolheu não pode contabilizar uma solução mais de uma vez.)

Em termos de conjuntos, o Princípio Aditivo pode ser enunciado como segue, onde escrevemos $|X|$ para denotar o número de elementos do conjunto (finito) X.

Proposição 6. *Se A e B são conjuntos finitos, sem elementos comuns, então $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

Uma habilidade importante para resolver problemas de contagem é perceber quando devemos usar o Princípio Aditivo, quando usar o Princípio Multiplicativo e, em especial, como e quando podemos combinar ambos em uma solução (como fizemos no exemplo acima). Para isso, sugiro que o leitor resolva alguns dos exercícios constantes do material "Exercícios de Princípios Básicos de Contagem".

4 Contando pelo complementar

Nesta seção exploramos brevemente o seguinte fato curioso e bastante útil: muitas vezes, é mais fácil contar o número de maneiras que certa situação tem de *não acontecer* do que o número de maneiras que ela tem de acontecer. Ou, de forma semelhante, no lugar de contar diretamente o número de objetos de um certo tipo, podemos tentar contar primeiro o número de objetos que *não são* desse tipo e, em seguida, subtrair este valor do total de objetos (que muitas vezes é fácil de calcular); ao proceder assim, ainda obteremos como resultado o número de objetos do tipo que queríamos contar. Vejamos um exemplo dessa situação.

Exemplo 7. *No que segue, chamamos de* palavra *qualquer sequência finita de letras, formadas usando nosso alfabeto de 26 letras. Assim, para ser considerada uma palavra, a sequência finita de letras não precisa fazer sentido, ou seja, não precisa ser encontrada num dicionário de Português. Por exemplo, "CASA", "PERIPONGUE", "TITANTNN" são palavras. Calcule o número de palavras com cinco letras, que possuem (pelo menos) duas letras consecutivas iguais.*

Solução. Se tentarmos contar diretamente quantas palavras desse tipo existem, não é difícil perceber que o problema precisará ser dividido em muitos casos. Por exemplo, podemos considerar primeiro as palavras em que todas as letras são iguais, em seguida aquelas em que exatamente quatro letras consecutivas são iguais mas a quinta letra é diferente, e assim por diante. Essa análise seria extensa e tediosa.

Como podemos, então, realizar a contagem? Ora, é bem mais simples contar o número de palavras com cinco letras que *não* possuem a propriedade desejada, ou seja, o número de palavras de cinco letras nas quais quaisquer duas letras consecutivas são distintas. De fato, escolhendo as letras uma a uma, temos que: há 26 possibilidades para a primeira letra e 25 possibilidades para cada uma das demais quatro letras (uma vez que cada uma precisa ser diferente apenas da letra anterior a ela). Sendo assim, há um total de $26 \cdot 25^4$ palavras de cinco letras que são *ruins* (por não satisfazerem a propriedade originalmente pedida). Por outro lado, o total de palavras com cinco letras (onde não impomos qualquer tipo de restrição) é, pelo Princípio Fundamental da Contagem, igual a 26^5 (pois há 26 possíveis escolhas para cada uma das cinco letras). Para terminar, basta ver que, se retirarmos do total de palavras com cinco letras as palavras que são ruins, o que sobrará serão as palavras que queremos contar. Assim, o número de palavras que possuem a propriedade pedida no enunciado é igual a $26^5 - 26 \cdot 25^4 = 1.725.126$. □

Dicas para o Professor

O material aqui apresentado merece pelo menos três sessões de 50min para ser discutido adequadamente. O texto começa com alguns exemplos bastante simples onde seria possível realizar a contagem listando todos os objetos que satisfazem as condições do problema. Contudo, é importante que esses exemplos sejam apresentados e resolvidos tanto através da formulação dessa lista quanto com o princípio fundamental da contagem, já que é nesse momento em que o aluno tem a chance de fazer uma ponte entre a aplicação abstrata do princípio fundamental da contagem e a situação concreta exposta no problema. Também neste momento, a árvore se decisão surge como uma importante ferramenta para fortalecer a construção dessa ponte. Com ela podemos organizar sistematicamente os objetos que haviam sido listados. Mesmo em situações em que não é possível listar todos os objetos ou desenhar a árvore inteira, é possível imaginar a construção da árvore.

Outro ponto muito importante é distinguir situações onde podemos usar diretamente o princípio fundamental da contagem daquelas em que é necessário aplicar o princípio aditivo, ou seja, dividir o problema em casos. É comum que os alunos tenham dificuldade, especialmente ao estudar problemas de contagem pela primeira vez, em distinguir quando as quantidades que surgem no decorrer da solução devem ser multiplicadas e quando elas devem ser somadas. O professor deve estimular os alunos a pensarem qual operação deve ser usada antes de dar a resposta para o problema. Assim, é importante também realizar exemplos que envolvam ambas as operações. Além disso, pode ser observado que, em situações futuras, as outras operações aritméticas (incluindo subtração e divisão) serão necessárias.

Por fim, a Seção 4 apresenta uma ideia que apesar de simples pode causar surpresa para muitos. Essa forma de contagem muitas vezes acaba sendo esquecida durante a resolução de problemas. Por isso, o professor deve ressaltar a sua importância, no sentido de que ela facilita enormemente a resolução de alguns tipos de problemas.

Observe que a referência [1] também contém vários exemplos, tanto de dificuldade igual quanto maior do que os apresentados aqui, os quais você pode explorar de acordo com a maturidade dos alunos da turma.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 2000.