Material Teórico - Módulo Fórmulas de Diferenciação

Exercícios - Parte III

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Abril de 2024

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Resolveremos, aqui, mais alguns exercícios com o auxílio das regras de derivação.

1 Exemplos

Para o primeiro exemplo, pode ser útil ao leitor revisar o conteúdo das páginas 9 e 10 da aula *Propriedades - Parte II*, no módulo anterior.

Exemplo 1. *Sejam $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial e α,β raízes distintas de p. Mostre que entre α e β há uma raiz do polinômio derivada p'.*

Solução. Se $p \not\equiv 0$, então p admite apenas um número finito de raízes. Logo, não há perda de generalidade em assumir que $\alpha < \beta$ são raízes consecutivas de p. Desse modo, se m e n são as multiplicidades de α e β como raízes de p, podemos escrever

$$p(x) = (x-\alpha)^m (x-\beta)^n q(x),$$

sendo q uma função polinomial que não se anula no intervalo $[\alpha,\beta]$. Como q não se anula no intervalo $[\alpha,\beta]$, o teorema do valor intermediário garante que os valores $q(x)$ têm o mesmo sinal para $\alpha \le x \le \beta$.

Escrevendo $p = f \cdot q$, com $f(x) = (x-\alpha)^m(x-\beta)^n$, a regra do produto fornece $p' = f' \cdot q + f \cdot q'$; uma aplicação adicional dessa regra dá

$$f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^n + n(x-\alpha)^m(x-\beta)^{n-1},$$

de modo que

$$\begin{aligned}
p'(x) &= [m(x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^n + n(x-\alpha)^m(x-\beta)^{n-1}]q(x) \\
&\quad + (x-\alpha)^m(x-\beta)^n q'(x) \\
&= (x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}\{[m(x-\beta)+n(x-\alpha)]q(x) \\
&\quad + (x-\alpha)(x-\beta)q'(x)\} \\
&= (x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}g(x),
\end{aligned}$$

em que

$$g(x) = [m(x-\beta) + n(x-\alpha)]q(x) + (x-\alpha)(x-\beta)q'(x).$$

Então, $g(\alpha) = m(\alpha-\beta)q(\alpha)$ e $g(\beta) = -n(\alpha-\beta)q(\beta)$, de onde se vê que $g(\alpha)$ e $g(\beta)$ têm sinais contrários. Pelo TVI, g admite alguma raiz $\gamma \in (\alpha,\beta)$, o que, pela fato de g dividir p', resulta em $p'(\gamma) = 0$. $\square$

Observação 2. *Utilizamos, na solução acima, a versão da regra de Leibniz para o cálculo da derivada de um produto de três funções, qual seja,*

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'.$$

Mais geralmente, é fácil mostrar por indução que a derivada de um produto de n funções deriváveis $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tem por expressão

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdots f_n + f_1 \cdot f_2' \cdots f_n + f_1 \cdot f_2 \cdots f_n'.$$

Vejamos uma aplicação interessante do exemplo anterior.

Exemplo 3 (OBMU/2002, 2ª fase, Problema 1). *Seja $y = P(x)$ um polinômio de grau 4. Mostre que se existe uma reta (em $\mathbb{R}^2$) que corta o gráfico de P em 4 pontos, então existe uma reta que corta o gráfico em 4 pontos igualmente espaçados.*

Solução. Não há perda de generalidade em assumir que P é um polinômio mônico.

Sendo $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, o enunciado do problema diz que alguma reta corta o gráfico de P em 4 pontos distintos. Uma translação do eixo das ordenadas não altera esse fato, mudando apenas as equações da reta e de P. Nesse sentido, é imediato verificar que o polinômio $P_1(x) = P(x + x_0)$, com $x_0 = -a_3/4$, não possui termo de grau 3, isto é, $P_1(x) = x^4 + b_2x^2 + b_1x + b_0$.

Sendo $y = \alpha x + \beta$ a equação da reta, isso significa que o polinômio diferença, $Q(x) = P_1(x) - (\alpha x + \beta)$, admite 4 raízes distintas (a saber, as abscissas dos pontos de interseção), que denotaremos por x_1,x_2,x_3,x_4. Pelo exemplo anterior, o polinômio derivada $Q'(x)$ deve possuir 3 raízes reais, uma em cada intervalo $(x_i,x_{i+1}), i = 1,2,3$. Iterando o argumento, a segunda derivada,

$$Q''(x) = P_1''(x) = 12x^2 + 2b_2,$$

admite duas raízes reais e distintas. Então, $b_2 < 0$.

Agora, faça $a = b_2$ e escreva

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= x^4 + ax^2 + b_1x + b_0 \\
&= x^4 + a\left(x^2 + \frac{b_1}{a}x + \frac{b_1^2}{4a^2}\right) - \frac{b_1^2}{4a^2} + b_0 \\
&= x^4 + a\left(x + \frac{b_1}{2a}\right)^2 + b_0 - \frac{b_1^2}{4a^2} \\
&= x^4 + a(x+b)^2 + y_0,
\end{aligned}$$

em que $b = \frac{b_1}{2a}$ e $y_0 = b_0 - \frac{b_1^2}{4a^2}$. Subsequentemente, transladando o eixo das abscissas, podemos supor que $y_0 = 0$, de forma que

$$P_1(x) = x^4 + a(x+b)^2.$$

Para concluir a solução, é suficiente garantir a existência de uma reta $y = mx + n$ cortando o gráfico de P em 4 pontos de abscissas iguais a $-3r, -r, r$ e $3r$, sendo r um número positivo.

Em outras palavras, basta encontrar números reais m,n e $r > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
x^4 + a(x+b)^2 - (mx+n) &= (x-3r)(x-r)(x+r)(x+3r) \\
&= (x^2 - r^2)(x^2 - 9r^2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$x^4 + ax^2 + (2ab - m)x + (ab^2 - n) = x^4 - 10r^2x^2 + 9r^4.$$

Igualando os coeficientes, vem que $r = \sqrt{-a/10}$ (o que é possível, pois $a < 0$), $m = 2ab$ e

$$n = ab^2 - 9r^4 = ab^2 - 9a^2/100.$$

Com esses valores, a reta $y = mx + n$ corta o gráfico de P em 4 pontos, necessariamente igualmente espaçados, pois são pontos de uma reta cujas abscissas formam uma progressão aritmética.

$\square$

Considere a cúbica $f(x) = x^3 + px + q$, sendo p,q números reais. A expressão

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

chama-se *discriminante* de f. Por exemplo, o discriminate da cúbica $x^3 - 6x + 4$ é -4.

Em analogia à discussão das raízes de um polinômio quadrático em função de seu discriminante, apresentamos o seguinte

Exemplo 4. *Nas notações acima, prove as seguintes afirmações:*

(i) *Se $D < 0$, f então admite três raízes reais e distintas.*

(ii) *Se $D = 0$, então f admite três raízes reais, tendo uma delas multiplicidade maior que 1.*

(iii) *Se $D > 0$, então f admite uma única raiz real.*

Solução. Antes de mais nada, vale lembrar que toda cúbica admite pelo menos uma raiz real [1].

No item (i), a desigualdade $D < 0$ implica $p^3/27 < -q^2/4 < 0$, o que garante p negativo. Portanto, as raízes da derivada $f'(x) = 3x^2 + p$ são $\pm k$, com $k = \sqrt{-p/3}$.

`Afirmação` $f(-k)f(k) < 0$.

Antes de justificar a afirmação, vejamos como essa desigualdade permite a tese desejada. Com efeito, f' é negativa

[1] Confira o exemplo 3 da aula *Continuidade Laterais e em um Intervalo*, no módulo *Funções Contínuas*.

no intervalo aberto $(-k,k)$, de forma que f é decrescente no intervalo fechado correspondente. Logo, tendo $f(-k)$ e $f(k)$ sinais contrários, só pode ser $f(-k) > 0 > f(k)$. Por outro lado, os limites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

permitem que escolhamos números reais $a < -k$ e $b > k$ tais que $f(a) < 0 < f(b)$. Portanto, as desigualdades

$$f(a) < 0 < f(-k), \quad f(-k) > 0 > f(k), \quad f(k) < 0 < f(b)$$

asseguram, via teorema do valor intermediário, a existência de raízes para f em cada um dos intervalos abertos $(a,-k)$,$(-k,k)$ e (k,b), confirmando que f admite três raízes reais e distintas.

Para justificar a afirmação, observe que

$$f'(-k) = 0 \Rightarrow 3k^2 + p = 0 \Rightarrow k^2 + p = \frac{2p}{3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(-k)f(k) &= [(-k)(k^2+p)+q][k(k^2+p)+q] \\ &= \left[(-k)\cdot\frac{2p}{3}+q\right]\left[k\cdot\frac{2p}{3}+q\right] \\ &= (-2pk/3+q)(2pk/3+q) \\ &= q^2 - \frac{4}{9}\cdot p^2k^2 = q^2 - \frac{4}{9}\cdot p^2(-p/3) \\ &= q^2 + \frac{4}{27}\cdot p^3 = 4D < 0. \end{aligned}$$

No item (ii), a igualdade $p^3/27 = -q^2/4 \leq 0$ dá $p \leq 0$. Se tivermos $p < 0$, já sabemos que $f(-k)f(k) = 4D = 0$, de onde se vê que alguma das raízes de f' também é uma raiz de f, ou seja, f admite uma raiz de multiplicidade ≥ 2. A outra raiz de f é necessariamente real. (Por que?) Se, por outro lado, $p = 0$, então $q = 0$ e $f(x) = x^3$, sendo 0 raiz tripla de f.

Para finalizar, se $D > 0$, devemos analisar os casos $p < 0, p = 0$ e $p > 0$. Os detalhes ficam como exercício para o leitor. Nesse sentido, note que:

- $p < 0$ implica $f(-k)f(k) = 4D > 0$. Se $f(-k) > 0$ (resp. $f(-k) < 0$), então f é positiva (resp. negativa) em $[-k, +\infty)$ (resp. em $(-\infty, k]$) e admite uma única raiz em $(-\infty, -k)$ (resp. em $(k, +\infty)$), intervalo no qual f' é positiva. Logo, tal raiz é simples.

- $p = 0$ implica $f'(x) = 3x^2$, de sorte que f é crescente. A única raiz de f é $\sqrt[3]{-q}$, necessariamente simples, já que tal raiz não é nula.

- $p > 0$ implica $f' > 0$; portanto, f é crescente e admite uma única raiz (que é simples).

□

Para compor a solução do próximo exemplo, utilizaremos alguns fatos elementares a respeito de hipérboles, que o leitor pode encontrar na aula correspondente do módulo *Cônicas*.

Quando uma hipérbole tem eixos de mesma medida, dizemos que ela é *equilátera*. Assim, na forma normal, uma hipérbole equilátera tem equação

$$y^2 - x^2 = 2c, \text{ com } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \qquad (1)$$

Nesse caso, as assíntotas da hipérbole (quais sejam, as retas $y = \pm x$) são perpendiculares e, reciprocamente, é fácil ver que uma hipérbole cujas assíntotas são perpendiculares é equilátera.

Por outro lado, de acordo com o material da seção 2 da aula *Interpretação Algébrica* do módulo *Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria*, as coordenadas x',y' do sistema $OX'Y'$, obtido de OXY por uma rotação de $45°$ em torno da origem, se relacionam com as coordenadas x,y a partir das fórmulas

$$x + y = \sqrt{2}x', y - x = \sqrt{2}y'.$$

Substituindo em (1), vemos que a equação da hipérbole equilátera se torna $x'y' = c$ no novo sistema cartesiano.

Reciprocamente, se $c \neq 0$, a equação $x'y' = c$ representa uma hipérbole equilátera.

Exemplo 5 (OBMU/2003, 2ª fase, Problema 1). *São dados uma parábola e um ponto A fora dela. Para cada ponto P da parábola, seja t a tangente à parábola por P e r a reta paralela ao eixo da parábola por P. A reta perpendicular a t por A corta r em Q. Prove que, ao variar P, o ponto Q percorre uma hipérbole equilátera.*

Solução. Uma escolha adequada de eixos permite reduzir a análise ao caso em que a parábola tem equação $y = mx^2$, com $m > 0$. Vamos analisar o caso em que a parábola tem equação $y = x^2$, deixando o caso mais geral a cargo do leitor.

Se $A = (a,b)$, afirmamos que, para cada $x \neq 0$, vale

$$Q = (x, a/2x + (b - 1/2)),$$

se $P = (x,x^2)$. Com efeito, sabemos que a inclinação de t é $2x$. Portanto, a reta que passa por A e é perpendicular a t tem equação $Y = b - \frac{1}{2x}(X - a)$. Logo, essa reta corta $r : X = x$ no ponto Q de abscissa x e cuja ordenada é

$$b - \frac{1}{2x}(x - a) = \frac{a}{2x} + (b - 1/2),$$

como afirmado.

Assim, $Q = (x, c/x + d)$, com $c = a/2$ e $d = b - 1/2$. Transladando os eixos de forma que a nova origem seja o ponto $(0,d)$, temos, nesse novo sistema, $Q = (x, c/x)$, de modo que o ponto Q pertence à hipérbole equilátera $XY = c$. $\square$

Observação 6. *A solução apresentada do exemplo anterior mostra que o LG do ponto Q é, de fato, uma hipérbole equilátera se, e só se, o ponto A, que já não pertence à parábola, também não pertence ao seu eixo (no caso, o eixo das ordenadas). Realmente, essa condição equivale a $c = a/2 \neq 0$. Caso A pertença ao eixo da parábola, Q percorre uma reta s perpendicular ao eixo e abaixo do ponto A, de tal modo que a distância de A até s é igual ao parâmetro da parábola (a distância do foco à diretriz). Um caso interessante ocorre quando A é o foco da parábola, situação na qual Q percorre a diretriz. Esse arranjo se traduz na seguinte* *propriedade:* o simétrico do foco em relação a uma tangente à parábola pertence à diretriz. *Reveja a* propriedade refletora da parábola *no exemplo 6 da 1ª aula do módulo* Definição de Derivada.

O próximo resultado generaliza um argumento que já utilizamos diversas vezes.

Exemplo 7. *Sejam I um intervalo e $f,g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis. Se a inclinação de uma reta tangente ao gráfico de f nunca supera a inclinação da reta tangente correspondente ao gráfico de g, então o mesmo se pode afirmar das inclinações das secantes aos gráficos de f e g. De forma mais precisa e equivalente, se $f'(x) \leq g'(x)$, para cada $x \in I$, então*

$$f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x), \tag{2}$$

para quaisquer $x,y \in I$ com $x < y$.

Solução. De fato, a função $\varphi := f - g$ é derivável, sendo $\varphi' = f' - g' \leq 0$ em I. Assim, φ' é monótona não crescente, isto é, $x,y \in I$, $x < y \Rightarrow \varphi(y) \geq \varphi(x)$, ou ainda, $f(y) - g(y) \leq f(x) - g(x)$, o que implica (2). $\square$

Observação 8. *Vale a desigualdade estrita na relação* (2) *caso tenhamos $f' < g'$ no interior de I (exercício).*

Para o próximo exemplo, precisaremos da seguinte desigualdade, sendo $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa e derivável:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq f'(a), \tag{3}$$

em que $a < b$ são pontos de I. Além disso, a desigualdade (3) será estrita se f for estritamente convexa. De fato, essa relação foi obtida na segunda parte da demonstração do teorema 6 da aula *Propriedades - Parte III*, no módulo anterior, para o caso em que f é estritamente convexa (raciocine com a no lugar de x_0). A adaptação para o caso em que f é apenas convexa é imediata.

Exemplo 9. *Prove: não existe função* super-exponencial*, isto é, não existe* $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *derivável satisfazendo* $g(0) = 1$ *e* $g'(x) = g(g(x))$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Solução. Digamos que uma função super-exponencial g exista. O fato de g ser positiva garante, pela relação $g' = g \circ g$, a positividade da derivada g', de modo que g é crescente. Por sua vez, g' também deve ser crescente, como a composta de funções crescentes. Portanto, g é estritamente convexa.

`Afirmação`: $x + 1 \leq g(x)$, para cada $x \geq 0$.

Com efeito, se f é a função identidade, temos $f' \leq g'$ em $[0, +\infty)$, pois

$$g'(x) \geq g'(0) = g(g(0)) = g(1) > g(0) = 1 = f'(x).$$

Pelo exemplo anterior,

$$x \geq 0 \Rightarrow x = f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0) = g(x) - 1,$$

justificando a afirmação.

Por outro lado, a convexidade estrita de g garante, via desigualdade (3) (com $a = x, b = g(x)$), que

$$\frac{g(g(x)) - g(x)}{g(x) - x} > g'(x) = g(g(x)),$$

para todo $x \geq 0$, o que impossível, haja vista que

$$\frac{g(g(x)) - g(x)}{g(x) - x} < \frac{g(g(x))}{1} = g(g(x)).$$

Assim, funções super-exponenciais não existem. $\square$

Dicas para o Professor

O resultado do exemplo 1 é válido para funções deriváveis em geral e é conhecido como *Teorema de Rôlle.* Confira o módulo *Regra da Cadeia.*

Ainda em relação ao exemplo 1, o professor pode discutir o seguinte problema com sua turma: *se todas as raízes de um polinômio* P *forem reais, também serão reais as raízes do polinômio derivada* P'. Quando as raízes são simples, a solução segue imediatamente do referido exemplo. Para o caso de raízes múltiplas, vale lembrar que a *é raiz de multiplicidade* $k \geq 1$ *do polinômio* P *se, e só se,* a *é raiz de multiplicidade* $k-1$ *do polinômio derivada* P' (vide exemplo 14 da aula *Propriedades - Parte II*, módulo anterior).

Duas ou três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material, a depender do nível de maturidade da turma.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo.* 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.

3. G. H. Hardy. *A Course of Pure Mathematics.* 3ª ed. New York: Dover, 2018.