Material Teórico - Módulo Resolução de Exercícios

Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum - Parte 2

Sexto Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

12 de abril de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, continuamos apresentando exercícios variados envolvendo múltiplos e divisores de números naturais, bem como os conceitos de máximo divisor comum (mdc) e mínimo múltiplo comum (mmc).

Exemplo 1. *Uma lâmpada pisca de* 14 *em* 14 *segundos e uma outra lâmpada pisca de* 20 *em* 20 *segundos. Um cronômetro zerado foi ligado exatamente quando estas lâmpadas piscaram juntas. Se o cronômetro foi desligado na primeira vez em que as lâmpadas piscaram juntas novamente, que tempo ele marcava quando isso ocorreu?*

Solução. Como uma das lâmpadas pisca de 14 em 14 segundos e a outra pisca de 20 e 20 segundos, o cronômetro marca, em segundos, múltiplos de 14 quando uma das lâmpadas pisca e múltiplos de 20 quando a outra lâmpada pisca. Desse modo, quando as duas lâmpadas piscaram juntas novamente, o cronômetro marcava, em segundos, $\text{mmc}(14{,}20)$. Calculando esse mmc pelo método das divisões sucessivas, obtemos

$$\begin{array}{r|l}
14,20 & 2 \\
7,10 & 2 \\
7,5 & 5 \\
7,1 & 7 \\ \cline{2-2}
1,1 & 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140
\end{array}$$

Assim, o cronômetro marcava **140 segundos**, ou, o que é o mesmo, **2 minutos e 20 segundos**, quando foi desligado. □

Exemplo 2. *Dois ciclistas correm numa pista circular e gastam, respectivamente,* 30 *segundos e* 35 *segundos para completar uma volta. Eles partem do mesmo local e no mesmo instante e, após algum tempo, se encontram no local de partida pela primeira vez. Neste momento, o atleta mais veloz estará completando quantas voltas? E o menos veloz? Depois de quanto tempo da largada ocorrerá esse encontro?*

Solução. O ciclista mais veloz gasta 30 segundos para completar cada volta, logo, leva 60 segundos para completar 2 voltas, 90 segundos para completar 3 voltas, e assim por diante, sempre passando pelo ponto de partida depois de decorrido um tempo igual a um múltiplo de 30 segundos desde a largada. De modo semelhante, o ciclista mais lento, que gasta 35 segundos para completar cada volta, passa pelo ponto de partida depois de decorrido um tempo igual a um múltiplo de 35 segundos desde a largada. Logo, os dois se encontram pela primeira vez no local de partida depois de decorridos exatamente $\operatorname{mmc}(30{,}35)$ segundos. Fatorando 30 e 35 separadamente, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2\cdot 3\cdot 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ \hline 1 & 5\cdot 7 \end{array}$$

Assim, encarando $\operatorname{mmc}(30{,}35)$ como o produto de todos os fatores primos que aparecem nas decomposições de 30 e de 35 quando são escolhidos os maiores expoentes, obtemos

$$\operatorname{mmc}(30{,}35) = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210,$$

ou seja, a primeira vez em que os ciclistas se encontram no ponto de partida ocorre exatamente 210 segundos após a largada. Como

$$\begin{array}{r|l} 2\,1\,0 & 3\,0 \\ \cline{2-2} 0 & 7 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{r|l} 2\,1\,0 & 3\,5 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array}$$

concluímos que, quando ocorre o encontro, o ciclista mais veloz terá completado 7 voltas e o mais lento 6 voltas. $\square$

Exemplo 3 (Banco OBMEP - adaptada). *Uma bibliotecária recebe* 130 *livros de Matemática e* 195 *livros de Português. Ela quer arrumá-los em prateleiras, colocando quantidades iguais de livros em cada prateleira e sem misturar livros de Matemática e de Português numa mesma prateleira. Para* *que o número de prateleiras utilizadas seja o menor possível, quantos livros ela deve colocar em cada uma?*

Solução. Para que o número de prateleiras utilizadas seja o menor possível, a quantidade de livros em cada prateleira deve ser a maior possível. Por outro lado, como a quantidade de livros em cada prateleira deve ser a mesma e os livros não podem ser misturados, essa quantidade deve ser um divisor comum a 130 e 195. Portanto a quantidade de livros por prateleira deve ser igual ao maior número que divida ao mesmo tempo 130 e 195, isto é, deve ser $\text{mdc}\,(130{,}195)$. Calculando esse mdc pelo método das divisões sucessivas, obtemos

	1	2
195	130	65
65	0	

Desse modo, a bibliotecária deve colocar 65 livros em cada prateleira.

$\square$

Exemplo 4 (Banco OBMEP). *No ponto de ônibus perto de sua casa, Quinzinho pode pegar os ônibus de duas linhas para ir à escola. Os ônibus de uma linha passam de* 15 *em* 15 *minutos e os da outra de* 25 *em* 25 *minutos, sendo que às* 7h30min *da manhã os ônibus das duas linhas passam juntos.*

(*a*) *A que horas ônibus das duas linhas passam juntos novamente pela primeira vez, após as* 7h30min*?*

(*b*) *Entre as* 7h30min *e a meia noite* (24h)*, quais são os horários em que os ônibus passam juntos nesse ponto perto da casa de Quinzinho?*

Solução. Se em determinado horário os ônibus das duas linhas passam juntos, eles voltarão a passar juntos nos múltiplos de $\text{mmc}\,(15{,}25)$ minutos após esse horário.

Calculando $\text{mmc}\,(15{,}25)$ pelo método da fatoração simultânea, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 15,25 & 3 \\ 5,25 & 5 \\ 1,5 & 5 \\ \hline 1,1 & 3 \cdot 5^2 = 75 \end{array}$$

Logo, os ônibus passam juntos pela primeira vez 75min = 1h15min depois de 7h30min, ou seja, às 7h30min + 1h15min = 8h45min. A tabela a seguir lista os horários nos quais os ônibus das duas linhas passam juntos entre 7h30min e 24h, além de 8h45min:

8h45min + 1h15min = 10h00min
10h00min + 1h15min = 11h15min
11h15min + 1h15min = 12h30min
12h30min + 1h15min = 13h45min
13h45min + 1h15min = 15h00min
15h00min + 1h15min = 16h15min
16h15min + 1h15min = 17h30min
17h30min + 1h15min = 18h45min
18h45min + 1h15min = 20h00min
20h00min + 1h15min = 21h15min
21h15min + 1h15min = 22h30min
22h30min + 1h15min = 23h45min

□

Exemplo 5. *A loja "Mania de Festas" vende copos em pacotes de* 24 *unidades e pratos em pacotes de* 18 *unidades. Fernando está organizando uma festa de aniversário para sua mãe e quer comprar a mesma quantidade de pratos e copos. A loja não fraciona a venda desses itens, ou seja, só vende pacotes lacrados. Sabendo que cada pacote de pratos custa*

R$ 6,00 *e cada pacote de copos custa* R$ 4,00*, quanto Fernando pagará pela compra desses itens, se ele deseja gastar o mínimo possível?*

Solução. Sabendo que Fernando quer gastar o mínimo possível e a quantidade de copos e pratos que ele deseja comprar deve ser um múltiplo comum de 24 e 18 (pois a loja só vende pacotes lacrados), concluímos que essa quantidade deve ser igual ao mmc de 24 e 18. Calculando mmc (24,18) pelo método da fatoração simultânea, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 24\,,18 & 2 \\ 12\,,9 & 2 \\ 6\,,9 & 2 \\ 3\,,9 & 3 \\ 1\,,3 & 3 \\ \hline 1\,,1 & 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72 \end{array}$$

Logo, mmc (24,18) = 72 e, assim, Fernando terá de comprar 72 pratos e 72 copos. Mas os pratos são vendidos em pacotes com 24 unidades e os copos em pacotes com 18 unidades, logo, ele deve comprar $72 \div 24 = 3$ pacotes de pratos e $72 \div 18 = 4$ pacotes de copos. Agora, uma vez que cada pacote de pratos custa R$ 6,00 e cada pacote de copos custa R$ 4,00, Fernando gastará, ao todo,

$$3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 18 + 16 = 34 \,\text{reais}.$$

□

Exemplo 6. *Calcule os valores de N para os quais os restos das divisões de* 4933 *e* 4435 *por N são respectivamente iguais a* 37 *e* 19*.*

Solução. Veja que N deve ser divisor comum a $4933 - 37 = 4896$ e $4435 - 19 = 4416$, ou seja, N deve ser divisor de mdc (4896,4416). Calculando esse mdc pelo método das divisões sucessivas, obtemos:

	1	9	5
4896	4416	480	96
480	96	0	

Assim, N deve ser divisor de 96. Entretanto, observe que N é o divisor em uma divisão na qual o resto é igual a 37; logo, N deve ser maior que 37. Como os únicos divisores de 96 maiores que 37 são 48 e o próprio 96, concluímos que $N = 48$ ou $N = 96$. $\square$

Exemplo 7. *Encontre o menor número inteiro $n > 1$ tal que n deixa resto 1 tanto quando dividido por 156 como quando dividido por 198.*

Solução. Uma vez que n deixa resto 1 nas divisões por 156 e por 198, temos que $n - 1$ é um múltiplo comum a 156 e 198. Como n é o menor número satisfazendo essas condicões, $n - 1$ deve ser igual a $\operatorname{mmc}(156,198)$.

Calculando esse mmc, obtemos

$$\begin{array}{r|l}
156,198 & 2 \\
78,99 & 2 \\
39,99 & 3 \\
13,33 & 3 \\
13,11 & 11 \\
13,1 & 13 \\ \cline{2-2}
1,1 & 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13 = 5148
\end{array}$$

Portanto, $n - 1 = 5148$, ou seja, $n = 5149$. $\square$

Exemplo 8. *Quantos são os números compreendidos entre 2000 e 4500, divisíveis simultaneamente por 18, 20 e 48? Calcule a soma desses números.*

Solução. Um número é divisível por 18, 20 e 48 simultaneamente se, se só se, é um múltiplo do mmc de 18, 20 e 48.

Vamos calcular $\operatorname{mmc}(18{,}20{,}48)$ fatorando cada número separadamente:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 \cdot 3^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2^2 \cdot 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2^4 \cdot 3 \end{array}$$

Uma vez que conheçamos as fatorações de 18, 20 e 48, o mmc entre esses números é dado pelo produto das potências cujas bases são todos os primos que aparecem nas fatorações dos três números e cujos expoentes são os maiores possíveis, escolhidos dentre os expoentes que aparecem nas fatorações. Neste caso, temos:

- escolhas possíveis para a potência de 2: 2^1, 2^2 ou 2^4;
- escolhas possíveis para a potência de 3: 3^2 ou 3^1;
- escolha possível para a potência de 5: 5^1.

Desse modo, escolhemos 2^4, 3^2 e 5^1, que são as potências cujos expoentes são os maiores possíveis. Logo,

$$\operatorname{mmc}(18{,}20{,}48) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 720.$$

Agora, devemos encontrar os múltiplos de 720 que se encontram entre 2000 e 4500. Dividindo 2000 e 4500 por 720, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,0\,0 & 7\,2\,0 \\ \cline{2-2} 5\,6\,0 & 2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{r|l} 4\,5\,0\,0 & 7\,2\,0 \\ \cline{2-2} 1\,8\,0 & 6 \end{array}$$

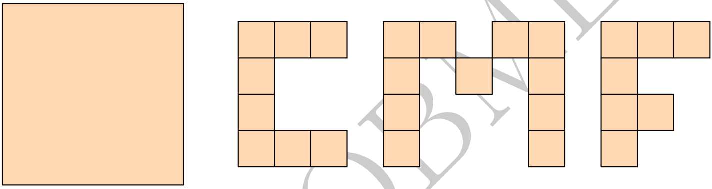
Assim, concluímos que o menor dos múltiplos de 720 que está situado entre 2000 e 4500 é $720 \cdot 3$ e o maior desses múltiplos é $720 \cdot 6$.

Portanto, há quatro números compreendidos entre 2000 e 4500 e divisíveis simultaneamente por 18, 20 e 48; a soma dos mesmos é igual a

$$\begin{aligned}720 \cdot 3 + 720 \cdot 4 + 720 \cdot 5 + 720 \cdot 6 &= 720 \cdot (3 + 4 + 5 + 6) \\ &= 720 \cdot 18 = 12960.\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 9 (CMF - Adaptada). *Uma cartolina, no formato de um quadrado de* 1m *de lado, é recortada em quadradinhos de* 16cm^2*, a fim de construir um letreiro com as iniciais do Colégio Militar de Fortaleza. Cada letra deve ser formada por quadradinhos de* 16cm^2*, totalizando um letreiro com* 26 *quadrados, conforme representado abaixo*



A quantidade mínima de cartolinas que devem ser recortadas, conforme descrito acima, para que se construam letreiros completos, sem que faltem nem sobrem quadradinhos, é um número:

(a) *múltiplo de* 4*;*

(b) *cuja soma dos algarismos é* 8*;*

(c) *ímpar;*

(d) *divisível por* 5*;*

(e) *primo.*

Solução. Em cada letreiro são utilizados 26 quadradinhos. Por outro lado, uma vez que $1\text{m}^2 = 10000\text{cm}^2$, cada cartolina dá origem a

$$10000 \div 16 = 625\,\text{quadradinhos}.$$

O enunciado pede a quantidade *mínima* de cartolinas que devem ser recortadas para que se construam letreiros completos, sem que faltem nem sobrem quadradinhos. Desse modo, o número de quadradinhos utilizados deve ser o mínimo múltiplo comum de 26 e 625. Agora, veja que $26 = 2 \cdot 13$ e $625 = 5^4$, de sorte que 26 e 625 não possuem fatores primos comuns. Portanto, concluímos que

$$\text{mmc}\,(26{,}625) = 26 \cdot 625 = 16250.$$

Daí, a quantidade mínima de cartolinas satisfazendo as condições do enunciado é $16250 \div 625 = 26$. Como $2 + 6 = 8$, a alternativa correta é a letra **(b)**. $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

Antes de resolver cada problema, é recomendável fazer uma pequena revisão sobre os conteúdos abordados. Em particular, é importante que os alunos conheçam os métodos utilizados para calcular mdc e mmc. Embora seja interessante apresentar outras técnicas para o cálculo do mdc de números naturais, ressalte que o método mais efetivo é o das divisões sucessivas, porque, para números grandes, pode ser difícil encontrar as fatorações desses números em primos.