Material Teórico - Módulo Funções Trigonométricas

Cotangente, Cossecante e Secante
Parte 1

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

26 de novembro de 2024

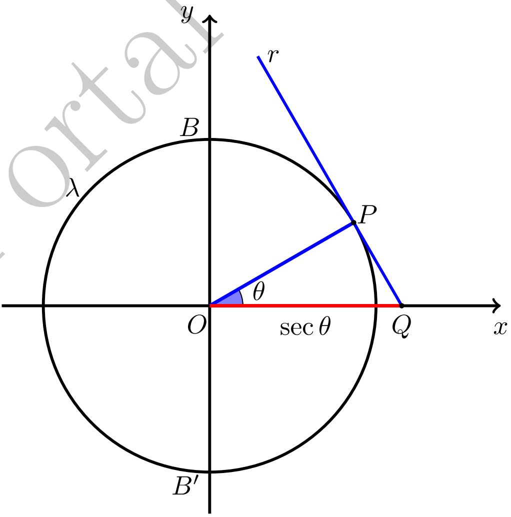
PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Neste material, introduzimos as funções trigonométricas secante, cossecante e cotangente. Como veremos adiante, essas funções são, em cada ponto, os inversos multiplicativos das funções cosseno, seno e tangente no mesmo ponto, respectivamente, quando esses inversos existirem.

Em tudo o que segue, λ é o círculo trigonométrico em um sistema cartesiano xOy, de forma que λ tem raio 1 e centro na origem O do sistema; em particular, λ tem comprimento 2π.

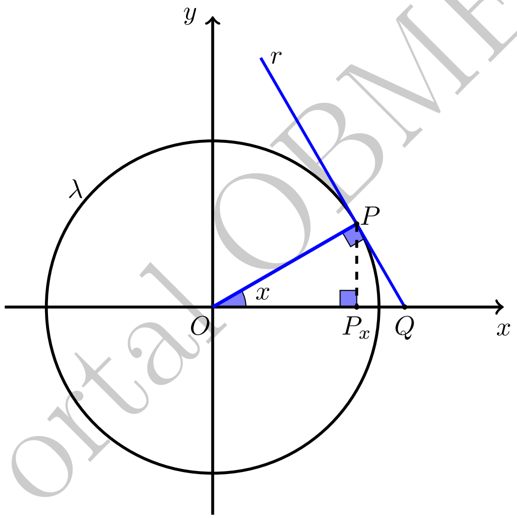
A função secante

Dado θ (leia "*téta*") real tal que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, sejam P o ponto do círculo λ associado ao arco $\widehat{AP}$ que mede θ radianos a partir de $A = (1,0)$, no sentido anti-horário; como $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, isso implica que o ponto P não coincide nem com o ponto $B = (0,1)$ nem com o ponto $B' = (0,-1)$. Portanto, a reta r, tangente a λ e passando por P (veja a figura abaixo, na qual $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ — e, portanto, P está situado no primeiro quadrante de λ) não é paralela ao eixo das abscisssas.



Definimos a **secante** de θ, e a denotamos por $\sec\theta$, como a abcissa do ponto de interseção da reta r com o eixo x. Na figura acima, como a abcissa do ponto de interseção da reta r com o eixo x é positiva, o valor da $\sec\theta$ é positivo e coincide com a medida do segmento destacado em vermelho. Note que, quando $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a reta r, tangente a λ em P, é paralela ao eixo x, logo, r e o eixo x não se intersectam. Daí, a secante não está definida para esses valores.

Por outro lado, seja P_x a projeção ortogonal de P sobre o eixo x. Então os triângulos OPQ e OP_xP são semelhantes, pois ambos têm um ângulo igual a x e um ângulo reto (veja a próxima figura).



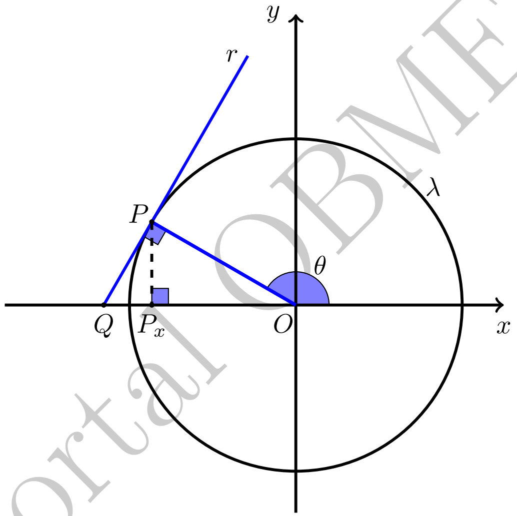
Daí, obtemos

$$\frac{OP_x}{OP} = \frac{OP}{OQ}.$$

Como $OP = 1$, $OP_x = \cos\theta$ e $OQ = \sec\theta$, a igualdade acima implica $\dfrac{\cos\theta}{1} = \dfrac{1}{\sec\theta}$, logo,

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}.$$

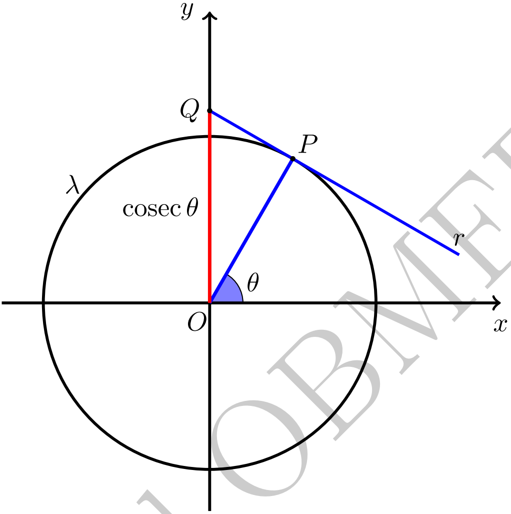
A relação $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ continua válida nos casos em que o ponto P não pertence ao primeiro quadrante. Para ver isso, comece notando que a secante é positiva quando x pertence aos quadrantes I e IV e negativa quando x pertence aos quadrantes II e III, ou seja, a secante tem o mesmo sinal do cosseno. Daí, basta repetir os cálculos feita acima em cada caso, substituindo $\cos\theta$ e $\sec\theta$ por $|\cos\theta|$ e $|\sec\theta|$, respectivamente. Veja, na figura abaixo, o caso em que x pertence ao segundo quadrante. Como $Q = (\sec\theta, 0)$ e $P_x = (\cos\theta, 0)$, temos $OQ = |\sec\theta|$ e $OP_x = |\cos\theta|$.



A função cossecante

Dado θ real tal que $\theta \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, sejam P o ponto do círculo trigonométrico λ associado ao arco $\overset{\frown}{AP}$ que mede θ radianos a partir de $A = (1,0)$, no sentido anti-horário. Como os semicírculos de λ têm comprimento π, temos que $P \neq A, A'$, em que $A' = (-1,0)$; portanto, sendo r a reta que passa por P e que é tangente a λ, temos que r não é paralela ao eixo das ordenadas (veja a figura a seguir).

A **cossecante** de θ, a qual denotamos por $\operatorname{cosec}\theta$, é a ordenada do ponto de interseção de r com o eixo y. Na figura, como a ordenada do ponto de interseção da reta r com o eixo y é positiva, o valor da $\operatorname{cosec}\theta$ é positivo e coincide com a medida do segmento destacado em vermelho.



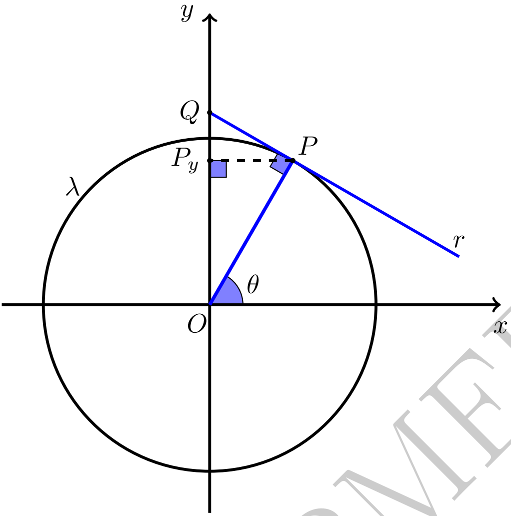
Observe, ainda, que, quando $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a reta r, tangente a λ em P, é paralela ao eixo y, logo, r não intersecta esse eixo. Daí, a cossecante não está definida para $\theta = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

A fim de relacionar $\operatorname{cosec}\theta$ com $\operatorname{sen}\theta$, seja P_y a projeção ortogonal de P sobre o eixo y. Então os triângulos OPQ e OP_yP são semelhantes, pois ambos têm um ângulo igual a θ e um ângulo reto (veja a figura abaixo). Daí, obtemos

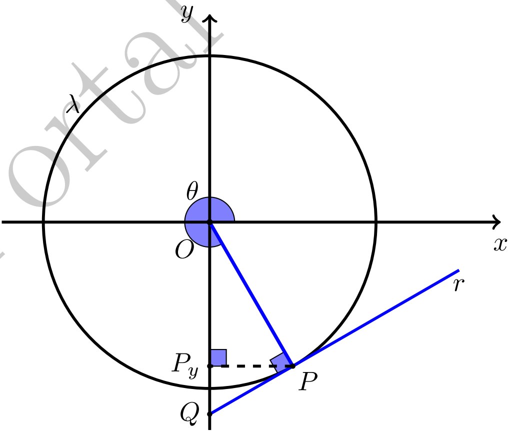
$$\frac{OP_y}{OP} = \frac{OP}{OQ}.$$

Uma vez que $OP = 1$, $OP_y = \operatorname{sen}\theta$ e $OQ = \operatorname{cosec}\theta$, obtemos $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1} = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$, logo,

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$



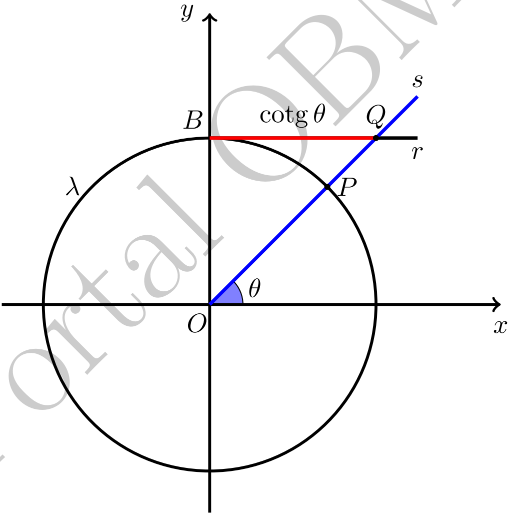
Como para a secante, a relação $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ continua válida quando o ponto P não pertence ao primeiro quadrante. (A figura a seguir ilustra o caso em que θ pertence ao quarto quadrante.)



De fato, veja que a cossecante é positiva quando θ pertence aos quadrantes I e II e negativa quando θ pertence aos quadrantes III e IV, ou seja, a secante tem o mesmo sinal do seno. Agora, basta repetir os cálculos feitos no caso $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, substituindo $\operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{cosec}\theta$ por $|\operatorname{sen}\theta|$ e $|\operatorname{cosec}\theta|$, respectivamente. Na situação da figura acima, temos $OQ = |\operatorname{cosec}\theta|$ e $OP_y = |\operatorname{sen}\theta|$.

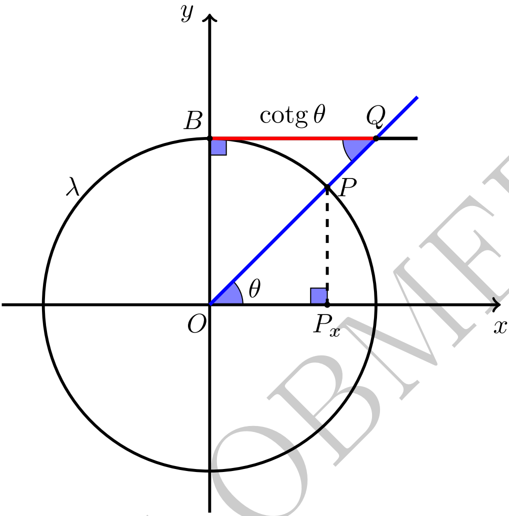
A função cotangente

Agora, sejam θ um real tal que $\theta \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e P o ponto do círculo trigonométrico λ associado ao arco que mede θ radianos a partir de $A = (1{,}0)$. Considere, também, a reta r, que é tangente a λ em $B = (0{,}1)$, e a reta s que contém os pontos O e P (veja a próxima figura). A **cotangente** de θ, denotada por $\operatorname{cotg}\theta$, é a abcissa do ponto Q, interseção das retas r e s.



Na figura, como a abcissa do ponto de interseção das retas r e s é positiva, o valor da $\operatorname{cotg}\theta$ é positivo e coincide com a medida do segmento destacado em vermelho. Quando $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, as retas r e s são paralelas, logo, não se intersectam, e a cotangente não está definida para esses valores de θ.

Por outro lado, seja P_x a projeção ortogonal de P sobre o eixo x. Então os triângulos POP_x e OQB são semelhantes, pois ambos têm um ângulo igual a θ e um ângulo reto (veja a figura abaixo).



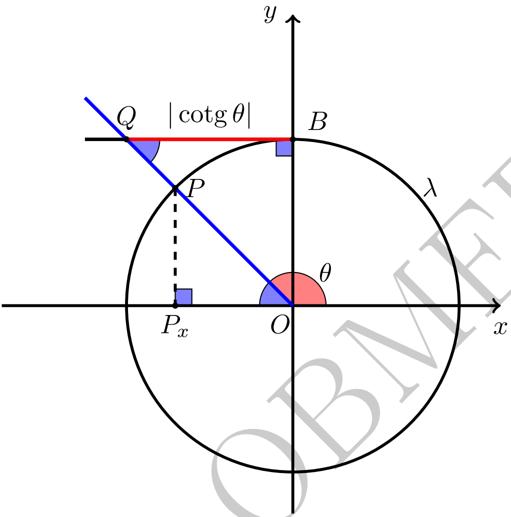
Daí, obtemos

$$\frac{QB}{OB} = \frac{OP_x}{PP_x}.$$

Uma vez que $OB = 1$, $OP_x = \cos\theta$ e $PP_x = \operatorname{sen}\theta$, obtemos $\dfrac{\operatorname{cotg}\theta}{1} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, logo,

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}.$$

Como para a secante e a cossecante, também neste caso, a relação $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta}$ continua válida ainda que o ponto P não pertença ao primeiro quadrante. Com efeito, a cotangente é positiva quando θ pertence aos quadrantes I e III e negativa quando θ pertence aos quadrantes II e IV, ou seja, a cotangente tem o mesmo sinal da tangente. Portanto, podemos repetir a conta feita acima substituindo $\operatorname{tg}\theta$ e $\operatorname{cotg}\theta$ por $|\operatorname{tg}\theta|$ e $|\operatorname{cotg}\theta|$, respectivamente. Veja, na figura abaixo, o caso em que θ pertence ao segundo quadrante. Neste caso, temos $QB = |\operatorname{cotg}\theta|$, $OP_x = |\cos\theta|$ e $PP_x = |\operatorname{sen}\theta|$.



Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos ao professor que apresente as definições das funções trigonométricas secante, cossecante e cotangente e, em seguida, incentive os alunos a encontrarem as relações entre essas funções e as funções cosseno, seno e tangente, utilizando semelhanças de triângulos. Se o professor julgar necessário, pode ser feita uma breve revisão sobre semelhança de triângulos.

Sugestões de Leitura Complementar

1 G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*, nona edição. São Paulo, Atual Editora, 2013.

2. M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner *Trigonometria e Números Complexos.* SBM, 2005.