

Material Teórico - Módulo de Frações como Porcentagem e Probabilidade

Frações como Probabilidade – Parte 2

Sexto Ano do Ensino Fundamental

**Autores: Prof. Francisco Bruno Holanda e
Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

6 de agosto de 2026



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Na primeira parte do material, vimos a regra básica para o cálculo de uma probabilidade e aprendemos a identificar o espaço amostral em situações clássicas como lançamentos de dados e moedas, retiradas de cartas de um baralho, etc. No entanto, são muitas as situações matemáticas nas quais os problemas exigem mais do que uma simples aplicação de fórmulas.

Nos próximos exemplos, analisaremos espaços amostrais que se alteram durante o experimento, como em sorteios sem reposição. Também usaremos frações equivalentes para encontrar dados no espaço amostral e aplicaremos o princípio multiplicativo para calcular probabilidades em cenários com múltiplas combinações.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Em uma sala do nono ano, ao sortearmos uma pessoa ao acaso, a probabilidade de que essa pessoa seja uma garota é $\frac{4}{7}$. Sabendo que existem entre 55 e 60 alunos na sala, calcule quantos são os garotos.*



Solução. Lembrando que probabilidade significa casos favoráveis dividido por casos totais e que toda fração equivalente a $\frac{4}{7}$ tem um múltiplo de 7 no denominador, concluímos que o número total de alunos (nosso espaço amostral) deve ser um múltiplo de 7. O único número múltiplo de 7 entre 55 e 60 é 56; portanto, esse é o número total de alunos na sala.

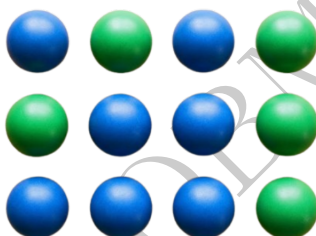
Agora, como a probabilidade de um aluno ser uma garota é igual a $\frac{4}{7}$, para calcular o total de garotas devemos procurar uma fração equivalente a essa, mas cujo denominador seja

igual a 56. Isso é fácil, se observarmos que $56 = 7 \cdot 8$:

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{32}{56}.$$

Logo, há 32 garotas e $56 - 32 = 24$ garotos nessa sala de aula. $\square$

Exemplo 2. *Carlos possui uma urna com cinco bolas verdes e sete bolas azuis. Ele deseja adicionar uma certa quantidade de bolas verdes à urna, de modo que a probabilidade de se retirar uma bola verde dobre, em relação à probabilidade inicial desse experimento. Quantas bolas verdes ele deve colocar?*



Solução. Inicialmente, é fácil perceber que o espaço amostral é a totalidade das bolas, logo, tem $5 + 7 = 12$ elementos; dessa forma, a probabilidade de se retirar uma bola verde é $\frac{5}{12}$. O dobro dessa fração é

$$\frac{5}{12} \cdot 2 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Agora, quando aumentamos o número de bolas verdes, alteramos tanto o número de resultados favoráveis quanto o tamanho do espaço amostral. Como não sabemos a quantidade de bolas verdes que deverão ser acrescentadas, representaremos esse valor por x . Nesse caso, o novo número de bolas verdes será $5 + x$ e o novo número total de bolas será $12 + x$, de forma que a nova probabilidade de se retirar uma bola verde será $\frac{5+x}{12+x}$.

Com isso, chegamos à equação

$$\frac{5+x}{12+x} = \frac{5}{6}.$$

Multiplicando em $\times$, obtemos $6(5+x) = 5(12+x)$, o que nos dá $30 + 6x = 60 + 5x$. Resolvendo a equação, chegamos a $x = 30$, concluindo que devem ser acrescentadas 30 bolas verdes. $\square$

Observação. Uma abordagem alternativa é a seguinte: como a fração $\frac{5}{6}$ é irredutível, a quantidade final de bolas deve ser um múltiplo de 6. Então, testando sucessivamente aumentos de 6, 12, 18, 24 e 30 bolas, e calculando para cada aumento a probabilidade de se retirar uma bola verde, encontramos novamente 30 como o número de bolas verdes que devem ser adicionadas.

Exemplo 3. *Joaquim vai fazer um teste com 20 questões objetivas, com cinco alternativas de resposta cada uma. Se Joaquim não estudar e resolver chutar as respostas, qual a probabilidade dele acertar todas as questões?*



Solução. Uma vez que para cada questão há cinco alternativas distintas, o Princípio Multiplicativo assegura que existem exatamente

$$\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times \dots \times 5}_{20 \text{ fatores}} = 5^{20}$$

formas diferentes de Joaquim responder ao teste. Essa é a quantidade de elementos do nosso espaço amostral, ou seja, a quantidade de casos possíveis.

Note que há uma única forma de se acertar todas as vinte questões, ou seja, há apenas um caso favorável. Considerando que os chutes de Joaquim sejam realmente aleatórios, a probabilidade de que ele marque corretamente todas as respostas é

$$\frac{1}{5^{20}}.$$

□

Exemplo 4. *Um número inteiro de 1 a 100 é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que o número escolhido seja múltiplo de 3 ou de 5?*

Solução. O nosso espaço amostral possui 100 elementos (os números naturais de 1 a 100). Queremos contar quantos desses números pertencem ao evento E: “ser múltiplo de 3 ou de 5”.

Primeiro, contamos os múltiplos de 3: como $100 = 3 \cdot 33 + 1$, existem 33 múltiplos de 3 (os números 3, 6, 9, ..., 99). Depois, contamos os múltiplos de 5: como $100 = 5 \cdot 20$, existem 20 múltiplos de 5 (os números 5, 10, 15, ..., 100).

Observe que se somarmos $33 + 20 = 53$, contaremos os números que são múltiplos tanto de 3 quanto de 5 — ou seja, que são múltiplos de 15 — duas vezes (uma vez quando contamos os múltiplos de 3 e outra quando contamos os múltiplos de 5). Mas $100 = 15 \cdot 6 + 10$, logo, há 6 múltiplos de 15 entre 1 e 100 (os números 15, 30, 45, ..., 90). Portanto, para corrigir esse excesso de contagem, devemos subtrair a quantidade de múltiplos de 15 que foi contada a mais. Assim,

$$|E| = 33 + 20 - 6 = 47.$$

Por fim, a probabilidade procurada é

$$\frac{47}{100} = 47\%.$$

□

Exemplo 5. *Em uma gaveta totalmente escura há 3 meias vermelhas e 4 meias azuis, todas do mesmo modelo e tamanho. Se você retirar duas meias ao acaso, uma após a outra e sem reposição, qual é a probabilidade de conseguir formar um par da mesma cor?*



Solução. Imagine que as meias de cada cor estejam numeradas do seguinte modo: V1, V2, V3, A1, A2, A3 e A4.

O número de elementos do espaço amostral formado com a retirada de duas meias em sequência é calculado pelo Princípio Multiplicativo: há 7 opções de meias para a primeira retirada e, como não há reposição, sobram 6 opções para a segunda retirada. Logo, o espaço amostral possui $7 \times 6 = 42$ possíveis resultados.

Para obtermos um par da mesma cor, temos dois cenários favoráveis distintos:

- **Retirar duas vermelhas:** Existem 3 opções para a primeira meia e 2 opções para a segunda. Isso nos dá $3 \times 2 = 6$ possibilidades.
- **Retirar duas azuis:** Existem 4 opções para a primeira meia e 3 opções para a segunda. Isso nos dá $4 \times 3 = 12$ possibilidades.

Assim, o total de casos favoráveis é a soma dos dois cenários, ou seja, $6 + 12 = 18$. Logo, a probabilidade de formar um par de meias da mesma cor é

$$\frac{18}{42} = \frac{3}{7}.$$

□

Exemplo 6. *Três dados cúbicos honestos são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de que o produto dos três números obtidos nas faces superiores seja um número ímpar?*



Solução. Vamos iniciar contando a quantidade de elementos do espaço amostral. Como cada dado possui 6 faces, utilizamos o Princípio Multiplicativo para obter $6 \times 6 \times 6 = 216$ resultados possíveis no lançamento dos três dados.

Agora, lembre-se de que o produto de vários números inteiros resulta em um número ímpar se, e somente se, **todos** os números multiplicados forem ímpares. Logo, o nosso evento favorável ocorre exclusivamente quando o 1º, o 2º e o 3º dados mostrarem números ímpares em suas faces superiores (ou seja, os números 1, 3 ou 5). Assim, temos 3 opções para o resultado do primeiro dado, 3 opções para o do segundo e 3 para o do terceiro. Aplicando novamente o Princípio Multiplicativo, concluímos que a quantidade de casos favoráveis é igual a

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

Dessa forma, a probabilidade do produto ser ímpar vale

$$\frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 12,5\%.$$

□

Exemplo 7. Em uma caixa há 9 cartões idênticos, numerados de 1 a 9. Se retirarmos dois cartões da caixa sucessivamente e sem reposição, qual é a probabilidade de que a soma dos números sorteados seja par?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Solução. Como são retirados dois cartões em sequência, sem reposição, o Princípio Multiplicativo garante que o espaço amostral é formado por $9 \times 8 = 72$ possíveis resultados.

Sabemos que a soma de dois números inteiros só resulta em um número par quando eles forem ambos pares ou ambos ímpares. Para analisar as situações favoráveis, observe que a caixa contém os cartões 2, 4, 6 e 8 com numeração par e os cartões 1, 3, 5, 7 e 9 com numeração ímpar. Assim, temos dois casos possíveis:

- **Soma de par + par:** há 4 números pares disponíveis, logo, $4 \times 3 = 12$ formas de sortear dois números pares em sequência, sem reposição.
- **Soma de ímpar + ímpar:** há 5 números ímpares disponíveis, logo, $5 \times 4 = 20$ formas de sortear dois números ímpares em sequência, sem reposição.

Desse modo, o total de resultados favoráveis (soma par) é igual a $12 + 20 = 32$.

Assim, concluímos que a probabilidade de que a soma dos números sorteados seja par é igual a

$$\frac{32}{72} = \frac{4}{9}.$$

□

Sugestões ao Professor

Recomendamos separar mais dois encontros de 50 minutos cada para discutir a resolução dos exercícios deste material. Como o público-alvo é formado por alunos do 6º e 7º anos, que possuem maior maturidade matemática, o professor pode estruturar as aulas expandindo a teoria da seguinte maneira:

- Ao longo da aula, destaque insistentemente a importância de descrever corretamente o espaço amostral. Isto porque o maior desafio em problemas básicos de probabilidade costuma ser perceber quando esse espaço amostral reduz de tamanho após a retirada de uma carta de baralho ou de uma bola de uma urna.
- Aproveite os encontros para revisar os conceitos de frações equivalentes e o uso de incógnitas em problemas de probabilidade. Mostre aos estudantes que testar múltiplos de uma fração irredutível é uma tática perfeitamente válida e, muitas vezes, mais rápida do que resolver o problema por meio de equações.
- Comente várias vezes com os alunos que existe um resultado avançado em Matemática que garante que se o número de testes for grande o suficiente, as frequências relativas dos experimentos irão convergir e se aproximar das probabilidades reais e teóricas que acabamos de calcular. Isso favorece a internalização de uma compreensão adequada do significado do cálculo de uma probabilidade.
- A Teoria da Probabilidade é a base de muitos métodos estatísticos profundos e possui as mais diversas aplicações práticas. Para encerrar o módulo, aconselhamos apresentar à turma dados estatísticos simples de fontes reais (como pesquisas do IBGE). Desafie os alunos a interpretar esses dados demográficos como probabilidades puras.