Material Teórico - Sistemas Lineares e Geometria Analítica

Sistemas com três variáveis - Parte 1

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Introdução

Nesta aula, damos continuidade à interpretação geométrica das soluções de sistemas de lineares. Vamos observar, agora, o que acontece com sistemas de três variáveis.

2 Equação do plano

Antes de mais nada, vamos determinar a forma geral de uma equação de um plano dentro do espaço euclidiano tridimensional (o espaço $\mathbb{R}^3$).

Lembre-se de que por três pontos não colineares passa um único plano. Sejam, pois, A, B e C três pontos não colineares em $\mathbb{R}^3$ e seja α o plano determinado por eles. Dado um ponto P qualquer em $\mathbb{R}^3$, com coordenadas cartesianas (x, y, z), queremos encontrar condições sobre x, y e z que determinem se P pertence ou não a α. Para isso, vamos utilizar o que aprendemos no módulo sobre vetores; em especial, vamos utilizar o conceito de produto misto de vetores.

Para que P pertença a α, é necessário e suficiente que os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ sejam coplanares. Isso acontece precisamente quando o produto misto entre eles é igual a zero, ou seja,

$$\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0. \tag{1}$$

Lembre-se de que o produto misto é obtido a partir do produto escalar, que denotaremos por "$\cdot$" e do produto vetorial, que denotaremos por "$\times$", da seguinte forma:

$$\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \overrightarrow{AP} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right).$$

Agora, observe que o produto vetorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é um vetor perpendicular ao plano α. Dizemos que este vetor é um vetor *normal* a α. Para simplificar, vamos denotá-lo por $\vec{u}$. Como A, B e C não são colineares, as propriedades do produto vetorial garantem que $\vec{u}$ é não nulo. Sejam a, b e c, nesta ordem, as coordenadas de $\vec{u}$ em $\mathbb{R}^3$, ou seja, $\vec{u} = (a, b, c)$. Observe que, se conhecermos as coordenadas dos pontos A, B e C, podemos facilmente encontrar as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ e de $\overrightarrow{AC}$ e, em seguida, calcular $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Sendo assim, os valores de a, b e c não dependem do ponto P escolhido. Dessa forma, a equação (1) pode ser escrita como:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0.$$

Agora, denotando as coordenadas do ponto A por (x_0, y_0, z_0), temos que $\overrightarrow{AP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Daí,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0 &\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0. \end{aligned}$$

Por último, observamos que os números a, b, c, x_0, y_0 e z_0 dependem apenas dos pontos A, B e C, mas não do ponto P. Sendo assim, podemos escrever $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ e a equação do plano pode ser expressão de forma simplificada como a seguir.

A equação de um plano em $\mathbb{R}^3$ tem a forma:

$$ax + by + cz = d, \tag{2}$$

onde a, b e c não são todos nulos.

Concluímos, então, que para qualquer plano α em $\mathbb{R}^3$ existem quatro números reais a, b, c, d tais que o conjunto dos pontos (x, y, z) que pertencem a α são aqueles que satisfazem a equação (2) acima. Reciprocamente, se a, b e c são reais quaisquer, não todos nulos, então o conjunto dos pontos (x, y, z) que satisfazem a equação (2) determina um plano normal ao vetor (a, b, c).

Veja que (2) generaliza de forma natural a equação da reta, que possui forma geral $ax + by = c$.

Observação 1. *Se multiplicarmos ambos os lados da equação $ax + by + cz = d$ por um real não nulo k, obteremos a equação equivalente $kax + kby + kcz = kd$. Dessa forma, equações diferentes podem representar um mesmo plano. Veja ainda que $d = 0$ se, e somente se, o plano passa pela ponto $(0, 0, 0)$ (origem). No caso em que $d \neq 0$, para qualquer $d' \neq 0$ existem a', b' e c' tais que a equação $a'x + b'y + c'z = d'$ representa o mesmo plano que a equação original; de fato, basta escolher $k = d'/d$. Dessa forma, no caso em que $d \neq 0$, é possível escolher qualquer valor de d e, a partir dele, determinar os valores de a, b e c.*

Exemplo 2. *Encontre a equação cartesiana do plano π que contém os pontos $A = (1, -1, 3)$, $B = (4, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 3)$.*

Solução 1. Vamos seguir os passos descritos nesta seção. Primeiro, calculamos as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (4, 0, 1) - (1, -1, 3) = (3, 1, -2).$$

e

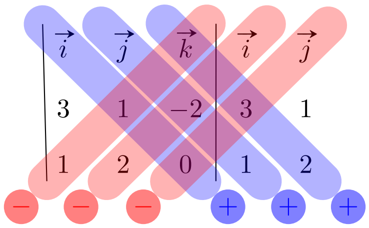
$$\overrightarrow{AC} = (2, 1, 3) - (1, -1, 3) = (1, 2, 0).$$

Agora, vamos chamar de $\vec{u}$ o produto vetorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. As coordenadas de $\vec{u}$ podem ser obtidas aplicando-se o algoritmo que aprendemos durante a aula sobre produtos vetoriais.

Sejam $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ os vetores canônicos correspondentes aos eixos x, y e z, respectivamente. Devemos, então, calcular o seguinte determinante:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Faremos isso seguindo a regra da Sarrus, como indicado no diagrama a seguir:



O resultado é:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 0\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} - \vec{k} + 4\vec{i} - 0\vec{j}\\ &= 4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}.\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos $\vec{u} = (4, -2, 5)$.

Lembrando que $\vec{u}$ é um vetor normal ao plano π desejado, na forma padrão $ax + by + cz = d$ da equação desse plano podemos fazer $a = 4$, $b = -2$ e $c = 5$, obtendo uma equação do tipo $4x - 2y + 5z = d$. Resta, apenas, calcular o valor de d. Para tanto, utilizamos o fato de que o ponto $A = (1, -1, 3)$ pertence ao plano, obtendo

$$d = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot 3 = 4 + 2 + 15 = 21.$$

Logo, a equação do plano π é:

$$4x - 2y + 5z = 21.$$

□

Solução 2. Chamemos de O o ponto $(0, 0, 0)$. Primeiramente, vejamos se O pertence ou não ao plano que passa pelos pontos A, B e C. Para isso, basta examinar se os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são coplanares, o que pode ser feito calculando seu produto misto: $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]$. Como $\overrightarrow{OA} = (1, -1, 3)$, $\overrightarrow{OB} = (4, 0, 1)$ e $\overrightarrow{OC} = (2, 1, 3)$, dessa vez vamos calcular o produto misto diretamente pelo determinante:

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}\\ &= 0 - 2 + 12 - 0 - 1 + 12\\ &= 21.\end{aligned}$$

Como $21 \neq 0$, temos que O não pertence ao plano determinado por A, B e C.

Agora, pela Observação 1, sabemos que a equação do plano que passa por A, B e C é da forma $ax + by + cz = d$, com $d \neq 0$. Também por aquela observação, podemos escolher para d o valor que acharmos mais conveniente. Para simplificar as contas, será interessante fazer $d = 21$ (valor do determinante que calculamos acima). Assim, queremos uma equação da forma

$$ax + by + cz = 21,$$

que represente o plano do enunciado. Como este plano passa pelo ponto $A = (1, -1, 3)$, podemos fazer $x = 1$, $y = -1$ e $z = 3$ nesta equação para obter $a - b + 3c = 21$. Da mesma forma, usando que o plano passa pelos pontos $B = (4, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 3)$, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a - b + 3c = 21\\ 4a + c = 21\\ 2a + b + 3c = 21\end{cases}. \qquad (3)$$

Por fim, utilizando qualquer método de resolução de sistemas estudados anteriormente (por exemplo, o escalonamento gaussiano), encontramos $a = 4$, $b = -2$, $c = 5$ como a solução do sistema.

Logo, a equação procurada para o plano é:

$$4x - 2y + 5z = 21.$$

□

Observação 3. *Se, na solução anterior, tivéssemos escolhido um outro valor para d, iríamos obter valores diferentes para a, b e c. Por sua vez, isso resultaria em uma equação diferente, porém equivalente (uma vez que $d \neq 0$) para o plano do enunciado. Por exemplo, fazendo $d = 1$ teríamos obtido $a = 4/21$, $b = -2/21$ e $c = 5/21$, o que resultaria na equação:*

$$\frac{4x}{21} - \frac{2y}{21} + \frac{5z}{21} = 1.$$

3 Sistemas com duas equações

Considere um sistema linear com duas equações nas variáveis x, y, z, digamos

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1\\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2\end{cases}.$$

Vamos tratar apenas o caso em que a_1, b_1 e c_1 não são todos nulos, assim como a_2, b_2 e c_2 não são todos nulos.

Pelo que vimos na primeira seção, cada equação do sistema define um plano em $\mathbb{R}^3$. De modo análogo ao que fizemos na aula anterior, observamos que os pontos (x, y, z) que são soluções do sistema são aqueles que pertencem à interseção desses dois planos.

Sejam π_1 e π_2, nesta ordem, os planos definidos pelas equações do sistema acima. No espaço, há três possibilidades para as posições relativas de dois planos: eles são paralelos, ou coincidentes, ou se intersectam em uma reta. Interpretando cada um de tais casos, temos as seguintes possibilidades:

(a) Se π_1 e π_2 são paralelos, então o sistema é impossível, pois não há pontos que pertencem a ambos os planos.

(b) Se π_1 e π_2 são coincidentes, então o sistema é possível e indeterminado: qualquer ponto que pertença a um dos planos (e, portanto, a ambos) é solução do sistema.

(c) Se π_1 e π_2 são concorrentes, então o sistema é possível e indeterminado, mas nem todo ponto que pertence a um dos planos será solução. Neste caso, as soluções do sistema são exatamente os pontos da reta de interseção dos dois planos.

Vejamos quando cada um desses casos acontece. Inicialmente, para que π_1 e π_2 sejam paralelos ou coincidentes, é necessário e suficiente que seus respectivos vetores normais possuam a mesma direção. Por sua vez, isso implica que esses vetores sejam múltiplos um do outro. Agora, para $i = 1$ e $i = 2$, temos que (a_i, b_i, c_i) é um vetor normal a π_i. Sendo assim, π_1 e π_2 são paralelos se, e somente existe um número real $k \neq 0$ tal que $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$.

Para distinguir o caso em que os planos são paralelos do caso em que eles são coincidentes, basta ver se essa constante de proporcionalidade k também satisfaz a igualdade $d_1 = kd_2$. Se isso for verdade, então vimos na primeira seção que os planos π_1 e π_2 são coincidentes; contudo, se $d_1 \neq kd_2$, então os planos π_1 e π_2 são paralelos.

Reciprocamente, se não existe k tal que $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$ então os planos têm vetores normais apontando em direções distintas, de forma que são concorrentes.

Por fim, veja que no caso em que a_2, b_2, c_2 e d_2 são todos não nulos, podemos escrever os casos (a)–(c) de forma mais simples e natural:

(a) π_1 e π_2 são paralelos se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$.

(b) π_1 e π_2 são coincidentes se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$.

(c) π_1 e π_2 são concorrentes se as razões $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ e $\frac{c_1}{c_2}$ não forem todas iguais.

Exemplo 4. *Resolva o seguinte sistema linear interpretando suas equações geometricamente:*

$$\begin{cases} 6x - 4y + 2z = 8 \\ 9x - 6y + 3z = 12 \end{cases}.$$

Solução. Vamos chamar de π_1 o plano determinado pela primeira equação do sistema e de π_2 o plano determinado pela segunda equação.

Sendo $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ os vetores normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente, temos $\vec{u}_1 = (6, -4, 2)$ e $\vec{u}_2 = (9, -6, 3)$. Percebe-se facilmente que a razão entre as coordenadas de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ é constante e igual a $2/3$. Dessa forma, $\vec{u}_1 = \frac{2}{3}\vec{u}_2$, o que indica que $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ são colineares.

Nossas discussões anteriores, juntamente com o parágrafo anterior, garantem que os planos π_1 e π_2 ou são paralelos ou coincidentes. Mas, como a razão entre os termos independentes do sistema é $\frac{8}{12}$ o que também é igual a $\frac{2}{3}$, podemos concluir que tais planos são coincidentes. Logo, o sistema é possível e indeterminado (há infinitas soluções).

Concluímos que um terno (x, y, z) de números reais é uma solução do sistema se, e somente se, eles satisfaz a equação $6x-4y+2z = 8$. Simplificando, temos $3x-2y+z = 4$ e, isolando z, temos $z = 4-3x+2y$. Por fim, observe que temos a liberdade de escolher quaisquer valores reais para as variáveis x e y, obtendo z, a partir desses valores, pela igualdade acima. Assim, o conjunto-solução do sistema pode ser expresso da seguinte forma:

$$S = \{(x, y, 4 - 3x + 2y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

□

Exemplo 5. *Resolva o seguinte sistema linear interpretando suas equações geometricamente:*

$$\begin{cases} 6x - 4y + 2z = 8 & (4) \\ 9x - 6y + 2z = 12 & (5) \end{cases}$$

Solução 1. Como no exemplo anterior, sendo $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ os vetores normais aos planos determinados pelas equações do sistema, temos que: $\vec{u}_1 = (6, -4, 2)$ e $\vec{u}_2 = (9, -6, 2)$.

Como $\frac{6}{9} \neq \frac{2}{2}$, concluímos que $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ não são colineares. Então, os planos correspondentes são concorrentes, logo, se intersectam em uma reta. Em particular, o sistema é possível e indeterminando, mas dessa vez todas as suas soluções pertencem a uma única reta. Assim, ao contrário do exemplo anterior, em que tínhamos a liberdade de escolher duas das variáveis de forma independente, dessa vez todas as soluções podem ser escritas em função de uma única variável.

Vamos tentar escrever todas as variáveis em função de x. Para tanto, começamos subtraindo a equação (4) da equação (5) para obter $3x - 2y = 4$, e daí $y = (3x - 4)/2$. Agora, substituindo o valor de y em uma das equações do sistema, por exemplo na primeira, obtemos:

$$6x - 4\frac{(3x - 4)}{2} + 2z = 8.$$

Daí,

$$\begin{aligned} 6x - 2(3x - 4) + 2z = 8 &\Rightarrow 6x - 6x + 8 + 2z = 8 \\ &\Rightarrow z = 0. \end{aligned}$$

Concluímos, então, que z deve ser sempre igual a zero. Apesar de que em outros problemas poderíamos ter obtido um valor diferente de z para cada x real, também não há problema algum em z ser constante. Geometricamente, isso indica que a reta que é solução do sistema dado está contida no plano determinado pelo eixo-x e pelo eixo-y.

Por fim, podemos escrever o conjunto-solução como:

$$S = \left\{ \left(x, \frac{3x - 4}{2}, 0\right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Solução 2. Vamos exibir aqui um outra estratégia (bastante geral) para determinar todas as soluções de um sistema de duas equações e três variáveis.

Sejam π_1, π_2, $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ definidos como na solução anterior, de sorte que $\vec{u}_1 = (6, -4, 2)$ e $\vec{u}_2 = (9, -6, 2)$. Vamos começar calculando o produto vetorial $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$:

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -4 & 2 \\ 9 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k} = (4, 6, 0).$$

Agora, observe que o vetor $\vec{v} = (4, 6, 0)$ é perpendicular tanto ao vetor $\vec{u}_1$ como ao vetor $\vec{v}_2$, de sorte que sua direção é paralela aos planos π_1 e π_2.

Isso nos diz que, se somarmos um múltiplo de $\vec{v}$ a qualquer ponto A_1 pertencente ao plano π_1, iremos obter um outro ponto pertencente a π_1.

De fato, se $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$ pertence a π_1, temos

$$6x_1 - 4y_1 + 2z_1 = 8; \tag{6}$$

por outro lado, $\vec{v} = (4, 6, 0)$ é uma solução da equação homogênea $6x - 4y + 2z = 0$, isto é:

$$6 \cdot (4) - 4 \cdot (6) + 2 \cdot (0) = 0. \tag{7}$$

Portanto, para qualquer número real k, se multiplicarmos a equação (7) por k e somarmos o resultado com a equação (6) obteremos:

$$6(x_1 + 4k) - 4(y_1 + 6k) + 2(z_1 + 0k) = 8.$$

Assim, $(x_1 + 4k, y_1 + 6k, z_1 + 0k) = A_1 + k\vec{v}$ também é uma solução da equação (4), logo, pertence ao plano π_1. Veja ainda que, ao variarmos k, o conjunto de pontos da forma $A_1 + k\vec{v}$ determina uma reta.

Da mesma forma, se tomarmos qualquer ponto pertencente ao plano π_2 e somarmos a ele um múltiplo de $\vec{v}$ obteremos um ponto que também pertence a π_2.

Por fim, para obtermos uma solução geral do sistema original, basta escolhermos um ponto particular P que pertença tanto a π_1 como π_2 e, em seguida, somarmos um múltiplo de $\vec{v}$ a P. De fato, para qualquer k real, o ponto $P + k\vec{v}$ pertencerá tanto ao plano π_1 como a π_2, logo, será uma solução. Além disso, ao variarmos k, geraremos todos os pontos de uma reta (que passa por P e tem direção $\vec{v}$). Como sabemos que todas as soluções do sistema deste exemplo pertencem a uma reta, ao variarmos k obteremos todas as soluções.

Resta apenas encontrar um ponto $P \in \pi_1 \cap \pi_2$ (ou seja, uma solução particular do sistema original). Uma maneira simples de fazer isso é atribuir um valor arbitrário para a variável x e, a partir desse valor, calcular os valores de y e z que, junto com o valor atribuído a x, satisfazem o sistema original.

Por exemplo, substituindo $x = 1$ nas equações (4) e (5), obtemos:

$$\begin{cases} -4y + 2z = 2 \\ -6y + 2z = 3 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $y = -1/2$ e $z = 0$, de sorte que o ponto $P = (1, -1/2, 0)$ pertence à interseção dos planos π_1 e π_2.

Concluímos, então, as soluções do sistema original são precisamente os pontos da forma:

$$\begin{aligned} P + k\vec{v} &= (1, -1/2, 0) + k(4, 6, 0) \\ &= (1 + 4k, -1/2 + 6k, 0). \end{aligned}$$

De outra forma, o conjunto-solução do sistema pode ser representado por:

$$S = \{(1 + 4k, -1/2 + 6k, 0) : k \in \mathbb{R}\}.$$

$\square$

Observação 6. *O conjunto S obtido na primeira solução do Exemplo 5 é o mesmo obtido na segunda solução (caso contrário, uma das soluções estaria incorreta), apesar de que S está sendo representado de formas bem diferentes nas duas soluções. Desse modo, temos:*

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \left(x, \frac{3x - 4}{2}, 0 \right) : x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{(1 + 4k, -1/2 + 6k, 0) : k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Para encontrar elementos específicos de S devemos atribuir valores para as variáveis livres, no caso, x ou k. Por exemplo, fazendo $x = 1$, temos $(3x-4)/2 = -1/2$, e assim obtemos a solução $(1, -1/2, 0)$. Esta solução também pode ser obtida tomando $k = 0$. Outro exemplo: se escolhermos $k = 2$, obteremos $1+4k = 9$ e $-1/2+6k = 23/2$, o que nos fornece a solução $(9, 23/2, 0)$. Esta mesma solução pode ser obtida fazendo $x = 9$, uma vez que $(3 \cdot 9 - 4)/2 = 23/2$.

Por fim, ressaltamos que a terceira coordenada de todos os pontos de S é sempre igual a zero, independentemente dos valores escolhidos para x ou k.

Dicas para o Professor

Este material deve ser apresentado em conjunto com o material da aula anterior, sobre sistemas de duas variáveis, e da aula seguinte, sobre sistemas com três equações e três variáveis. O conteúdo conjunto destas aulas pode ser coberto em três encontros de 50 min. Os alunos podem ficar curiosos sobre o que acontece se tivermos quatro ou mais variáveis. Enquanto em sistemas lineares com duas variáveis cada equação corresponde a uma reta no plano, e em sistemas com três variáveis cada equação corresponder a um plano no espaço, para obter interpretações geométricas de sistemas lineares com quatro ou mais variáveis seria necessário olhar para espaços euclidianos de dimensões 4 ou mais. Daí, surge o conceito de hiperplano, o qual generaliza as noções de reta e plano. A visualização de tais objetos não é uma tarefa fácil, mas com alguma imaginação ela não é impossível. De fato, da mesma forma que conseguimos representar objetos tridimensionais em uma folha de papel (que possui apenas duas dimensões), por exemplo usando projeções, também podemos representar objetos de quatro ou mais dimensões.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. A Matemática do Ensino Médio, vol.3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.

2. E. L. Lima. Meu Professor de Matemática e outras histórias, sexta edição, Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.

3. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Matrizes.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.