Material Teórico - Módulo Função Quadrática

Função Quadrática: Definições, Máximos e Mínimos

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Função quadrática

Neste material, apresentamos a definição de função quadrática e sua forma canônica. Esta última é utilizada no estudo de máximos e mínimos de funções quadráticas. Aqui, vamos utilizar bastante o que aprendemos no módulo sobre equações do segundo grau do nono ano, de forma que recomendamos fortemente que você revise o que aprendeu lá.

Uma **função quadrática**, ou **de segundo grau**, é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais dados, sendo $a \neq 0$. Observe que, se tivéssemos $a = 0$, obteríamos uma função afim, que já estudamos em módulos anteriores.

Exemplo 1. *A seguir, listamos alguns exemplos de funções quadráticas e identificamos o coeficiente de x^2, o coeficiente de x e o termo independente, que chamaremos respectivamente de a, b e c, como acima.*

(a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$: temos $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$.

(b) $f(x) = x^2 - 4x$: temos $a = 1$, $b = -4$ e $c = 0$.

(c) $f(x) = -x^2 + 5$: temos $a = -1$, $b = 0$ e $c = 5$.

2 Forma canônica

A **forma canônica** é uma outra maneira de expressar uma função quadrática dada. Ela é uma expressão do tipo

$$f(x) = a(x - k)^2 + m, \tag{1}$$

onde a, k e m são constantes e $a \neq 0$. No material teórico referente à próxima vídeo-aula, veremos que a forma canônica destaca um importante ponto do gráfico da função quadrática: seu *vértice*. Por ora, para expressar os valores de k e m em termos dos valores de a, b e c, executaremos os cálculos algébricos mostrados a seguir. Observe que, da linha (3) à linha (5), utilizamos a técnica de completamento de quadrados para o termo entre parênteses:

$$\begin{align} f(x) &= ax^2 + bx + c \tag{2}\\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \tag{3}\\ &= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \tag{4}\\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \tag{5}\\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{6}\\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \tag{7} \end{align}$$

Chegamos, então, à seguinte expressão:

A **forma canônica** da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \tag{8}$$

Comparando a definição acima com (1), concluímos que

$$k = -\frac{b}{2a} \quad \text{e } m = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Entretanto, frisamos novamente que, com um pouco de prática em exemplos práticos, muito melhor do que decorar as expressões acima é repetir os cálculos algébricos que levaram a (8). Vejamos um exemplo.

Exemplo 2. *Obtenha a forma canônica da função de segundo grau $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$.*

Solução. Conforme comentamos acima, repetiremos a dedução geral nesse caso particular:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 3x + 7\\ &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 7\\ &= 2\left(x^2 - 2x\cdot\frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) + 7\\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + 7\\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9 - 56}{8}\\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{47}{8}. \end{aligned}$$

Portanto, a forma canônica da função quadrática dada é $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{47}{8}$. □

3 Máximos e mínimos

Voltando à expressão geral (8) para a forma canônica, note que o termo $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior ou igual a zero. Assim, quando $a > 0$, temos que $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, quando $a < 0$ temos que $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De qualquer modo, como $a \neq 0$ em ambos os casos, a igualdade ocorre somente para $x + \frac{b}{2a} = 0$, isto é, quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Fixemo-nos no caso $a > 0$, sendo a análise do caso $a < 0$ totalmente similar. Então, $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de sorte que, graças a (8), temos

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a},$$

com igualdade se e só se $x = -\frac{b}{2a}$.

Podemos, então, enunciar o resultado a seguir, o qual explica quando funções quadráticas atingem valores máximos ou mínimos, e em que ponto(s) o fazem.

> Se $\boldsymbol{a > 0}$, então o **valor mínimo** da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ao variarmos x em $\mathbb{R}$, é obtido somente quando $x = -\frac{b}{2a}$. Ademais, esse valor mínimo é igual a $\frac{-\Delta}{4a}$.
>
> Se $\boldsymbol{a < 0}$, então o **valor máximo** da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ao variarmos x em $\mathbb{R}$, é obtido somente quando $x = -\frac{b}{2a}$. Ademais, esse valor máximo é igual a $\frac{-\Delta}{4a}$.

O resultado acima é bastante importante em aplicações. A fim de tornar patente tal importância, examinamos alguns exemplos a seguir, a começar por uma aplicação mais simples.

Exemplo 3. *Calcule o valor de c na função*

$$y = \frac{x^2}{2} - 3x + c$$

para que seu mínimo seja $1/2$.

Solução. Temos uma função quadrática na qual $a = 1/2$ e $b = -3$. Como $a > 0$, vimos que a função realmente atinge um valor mínimo, e que tal valor é igual a $-\frac{\Delta}{4a}$. Como é dado que o valor mínimo em questão é igual a $1/2$, temos $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{2}$. Portanto, $-\frac{\Delta}{4\cdot(1/2)} = \frac{1}{2}$, o que fornece $\Delta = -1$.

Por outro lado,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot c = 9 - 2c,$$

e daí

$$9 - 2c = -1 \implies 2c = 10 \implies c = 5.$$

□

A sequência dos próximos cinco exemplos mostra que, para aplicar a teoria de máximos e mínimos de funções quadráticas, uma etapa preliminar de *modelagem* é frequentemente necessária.

Exemplo 4. *Tenho material suficiente para erguer* $20\,\mathrm{m}$ *de cerca. Com ele pretendo construir um cercado retangular de* $26\,\mathrm{m}^2$ *de área. É possível fazer isso? Se for, quais as medidas dos lados deste retângulo.*

Solução. Seja x o comprimento e h a altura do retângulo. A fim de fazer o retângulo maior possível, devemos usar todo o material de que dispomos para a cerca. Sendo assim, $2x + 2h = 20$ ou, o que é o mesmo, $h = 10 - x$.

Por outro lado, a área do retângulo pode ser obtida em função de x pela expresão:

$$S(x) = x \cdot h = x(10 - x).$$

Logo, $S(x) = 10x - x^2$, e temos uma função quadrática em que $a = -1$, $b = 10$ e $c = 0$. Dessa forma, $\Delta = b^2 - 4ac = 100 + 0 = 100$ e, como $a < 0$, o resultado anterior garante que $S(x)$ possui um valor *máximo*, que é igual a

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-100}{4 \cdot (-1)} = 25.$$

Portanto, a maior área possível para o retângulo é $25\,\mathrm{m}^2$, e concluímos que não é possível construir um cercado de $26\,\mathrm{m}^2$. □

Exemplo 5. *Mostre que, se dois números positivos têm soma constante, então seu produto é máximo somente quando eles forem iguais.*

Solução. Sejam x e y os dois números e $s = x + y$ sua soma. Estamos assumindo que s é fixo e que x e y podem variar, e queremos encontrar o valor máximo do produto $p = xy$. Como $y = b - x$, temos que:

$$p = xy = x(s - x) = sx - x^2.$$

Veja agora que, na função de segundo grau $f(x) = sx - x^2$, o coeficiente de x^2 é $a = -1$, ao passo que o coeficiente de x é $b = s$. Como $a < 0$, a função assume um valor máximo, o fazendo somente quando $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{s}{2\cdot(-1)} = s/2$. Mas, quando tivermos $x = s/2$, seguirá de $x + y = s$ que $y = s - x = s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}$. Assim, quando $f(x)$ é máximo, temos que $x = y = s/2$; em particular, x e y serão iguais. □

Observe, agora, a relação entre o resultado do exemplo anterior com o do próximo.

Exemplo 6. *Mostre que, se o produto de dois números positivos é constante, então sua soma é mínima quando eles forem iguais.*

Solução. Sejam x e y os dois números positivos, e p seu produto. Estamos assumindo que p é dado e que x e y podem variar, mas sujeitos ao *vínculo* $xy = p$.

Se $s = x + y$, temos que x e y são raízes da equação de segundo grau (em u) $u^2 - su + p = 0$. Como sabemos que tal equação possui raízes reais, devemos ter $\Delta \geq 0$. Daí, $s^2 - 4p \geq 0$ ou, o que é o mesmo, $|s| \geq 2\sqrt{p}$.

Como x e y são positivos, temos que $s \geq 2\sqrt{p}$. Por fim, veja que o valor mínimo $2\sqrt{p}$ para s pode ser obtido apenas se $\Delta = 0$. Mas, sendo esse o caso, a equação $u^2 - su + p = 0$ terá raízes iguais, de sorte que $x = y = \frac{s}{2}$. □

Exemplo 7. *Certa empresa transporta* 2400 *passageiros por mês, da cidade A para a cidade B. A passagem custa* 20 *reais e a empresa deseja aumentar o preço. No entanto, o departamento de pesquisa dela estima que, a cada* 1 *real de aumento no preço da passagem,* 20 *passageiros deixarão de viajar pela empresa. Neste caso, qual deve ser o preço da passagem, em reais, para maximizar o faturamento da empresa?*

Solução. Vamos chamar de x o valor, em reais, do acréscimo no preço da passagem. O faturamento da empresa é uma função que depende do valor de x, que chamaremos de $F(x)$. Conforme dito no enunciado, quando o acréscimo é igual a x, estima-se que $20x$ pessoas deixarão de usar o transporte. Assim, restarão $2400 - 20x$ passageiros e cada um deles irá pagar $20 + x$ pela viagem. Logo, o faturamento será: $F(x) = (20 + x) \cdot (2400 - 20x)$.

Simplificando, temos que:

$$\begin{aligned} F(x) &= 48000 - 400x + 2400x - 20x^2 \\ &= -20x^2 + 2000x + 48000. \end{aligned}$$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, o valor de x que maximiza o faturamento realmente existe, sendo:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2000}{2 \cdot (-20)} = 50.$$

Como x é o valor do acréscimo, temos que o valor da passagem (que maximiza o faturamento) é 70 reais. $\square$

Exemplo 8. *Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O faturamento mensal resultante da venda destes lotes é $v(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal de produção é dado por $c(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Qual é o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo?*

Solução. O lucro pode ser obtido subtraindo-se o custo mensal de produção do faturamento mensal pela venda. Assim, para cada x lotes produzidos, a empresa lucra

$$f(x) = -2x^2 + 28x + 40.$$

Esta é uma função quadrática para a qual $a = -2$, $b = 28$ e $c = 40$. Como $a < 0$, ela atinge seu valor máximo quando

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{28}{2 \cdot (-2)} = \frac{28}{4} = 7.$$

Logo, a empresa deve produzir mensalmente 7 lotes do produto. $\square$

Exemplo 9. *Uma lanchonete vende, em média, 200 sanduíches por noite, ao preço de 6,00 reais cada um. O proprietário observa que, para cada dez centavos de real que ele diminui no preço, a quantidade média de sanduíches vendida aumenta em 20 unidades. Considerando o custo de 4,50 reais para produzir cada sanduíche, calcule o preço de venda que dará o maior lucro possível ao proprietário.*

Ideia da solução. Suponha que o valor na redução do preço do sanduíche tenha sido de $0{,}10x$ reais. Neste caso, serão vendidos $200 + 20x$ sanduíches. Se $F(x)$ é o valor do faturamento após essa redução, então:

$$F(x) = (6 - 0{,}10x) \cdot (200 + 20x).$$

Simplificando, temos que

$$F(x) = 1200 + 100x - 2x^2.$$

Por outro lado, o custo $C(x)$ para produzir os $200 + 20x$ sanduíches é $C(x) = 4{,}5 \cdot (200 + 20x) = 900 + 90x$.

Assim, o lucro $L(x)$ é igual a

$$\begin{aligned} L(x) &= F(x) - C(x) \\ &= 300 + 10x - 2x^2. \end{aligned}$$

O valor máximo de $L(x)$ será atingido quando

$$x = \frac{-10}{2 \cdot (-2)} = \frac{10}{4} = 2{,}50.$$

Assim, para que o lucro seja maximizado, a redução no preço do sanduíche deve ser de $0{,}1 \cdot 2{,}50 = 0{,}25$ reais (i.e., 25 centavos). Sendo este o caso, o novo preço pelo qual o sanduíche deverá ser vendido é 5,75 reais. $\square$

Antes de concluir este material, observamos que nem todo problema envolvendo funções de segundo grau e em cujo enunciado aparecem referências a valores máximos ou mínimos deve ser resolvido com o resultado obtido no início desta seção. Esse é o caso do nosso último

Exemplo 10. *A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir de seu desligamento (instante $t = 0$). Mais precisamente, controlada por um mecanismo, ela varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t medido em minutos e $T(t)$ em graus Celsius. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando ele atinge a temperatura de 39 °C. Qual o tempo mínimo de espera, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?*

Solução. Veja que, à medida que t aumenta (a partir de 0, obviamente), o valor de $T(t)$ apenas diminui. Sendo assim, o forno poderá ser desligado no instante $t \geq 0$ em que $T(t) = 39$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} -\frac{t^2}{4} + 400 = 39 &\implies t^2 = 4 \cdot 361 \\ &\implies t^2 = 38^2 \\ &\implies t = 38\,\text{min}. \end{aligned}$$

Veja que no último passo foi onde usamos $t \geq 0$. $\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja tratado em pelo menos dois encontros de 50 minutos, com amplo tempo alocado para resolução de exercícios. Nossa experiência diz que, ainda um ou mais alunos compreendam relativamente rapidamente o porquê de uma função quadrática assumir seu valor mínimo (resp. máximo) quando $a > 0$ (resp. $a < 0$), a passagem desse ponto para a modelagem de problemas de máximos e mínimos com funções quadráticas é uma etapa bastante difícil de ser transposta.

As referências abaixo contém vários outros exemplos e problemas propostos envolvendo máximos e mínimos de funções quadráticas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.