Material Teórico - Módulo Trigonometria I

Círculo trigonométrico - Parte 1

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

23 de abril de 2022

Portal da Matemática
OBMEP

1 O círculo trigonométrico

O **círculo trigonométrico** é o círculo de raio 1 e centro na origem, o ponto $(0,0)$, do plano cartesiano. (Ver nota de rodapé).[1]

Sejam $O = (0,0)$ e $A = (1,0)$ (esses nomes serão mantidos ao longo de todo o texto). O ponto O é a origem do plano cartesiano e centro do círculo trigonométrico. Como todos os pontos do círculo trigonométrico estão à distância 1 do ponto O, temos que esse círculo intersecta o eixo-x no ponto A. O ponto A é chamado de **origem do círculo trigonométrico** (ou, simplesmente, origem). Isso porque iremos "caminhar" sobre o círculo partindo do ponto A.

Vamos denotar por $P(x,y)$ um ponto P do plano cartesiano que tenha coordenadas (x,y). Suponha que P esteja sobre o círculo trigonométrico. A cada ponto P, podemos associar dois arcos que percorrem o círculo partindo da origem, A, em direção a P, um no sentido anti-horário e outro no sentido horário. Em Matemática, convenciona-se que o **sentido positivo** é o **anti-horário**, conforme indicado na Figura 1. Naturalmente, o **sentido negativo** é o **horário**.

Um **arco orientado** é um arco para o qual foi atribuído um sentido (no qual o arco é percorrido): anti-horário ou horário. Seguindo a convenção do parágrafo anterior, define-se a *medida algébrica* de um arco orientado como seu comprimento, no caso de arcos no sentido anti-horário, e seu comprimento multiplicado por -1, no caso de arcos no sentido horário. Note que o *comprimento* do arco é sempre positivo, mas sua medida algébrica depende se seu sentido.

A notação $\widehat{AP}$ será utilizada para indicar um arco orientado positivo de A para P, que possui ângulo central $\angle AOP$. Dizemos que $\widehat{AP}$ é o arco associado ao ponto P. Note que

[1] A primeira vídeo-aula deste módulo traz uma breve introdução à fórmula da distância entre pontos e à equação geral de um círculo. Caso o leitor queira um texto sobre isso, recomendamos a aula "Distância entre Dois Pontos" do Módulo "Geometria Analítica 2" e a aula "Circunferência" do Módulo "Geometria Analítica 2". Neste texto, focaremos apenas no caso do círculo trigonométrico.

o sinal do arco não depende dele ser o arco maior ou o arco menor, determinado pelos pontos A e P.

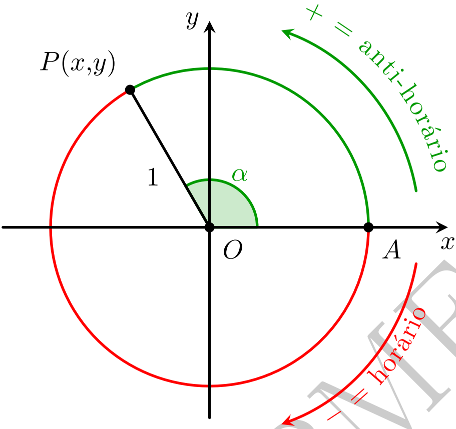


Figura 1: sentidos no círculo trigonométrico.

Na aula passada, observamos que o comprimento de um arco medido sobre um círculo de raio r e cujo ângulo central mede α radianos é dado por $C_{\text{arco}} = r\alpha$. É interessante observar que, como no círculo trigonométrico temos $r = 1$, isso garante que o comprimento de um arco desse círculo é *igual* à medida de seu ângulo central em radianos.

Os eixos do plano cartesiano dividem o círculo trigonométrico em quatro partes. Cada parte é chamada de **quadrante** e os quadrantes são numerados de I até IV (um a quatro em algarismos romanos), também em sentido anti-horário, sendo que o primeiro quadrante é aquele formado pelos pontos em que as ambas coordenadas são positivas (veja a Figura 2).

Observe que cada quadrante determina exatamente se as abcissas e as ordenadas de seus pontos são positivas ou negativas. De fato, nos quadrantes I e IV temos que as abcissas são positivas (pois esses quadrantes estão à direita do eixo-y e, portanto, seus pontos possuem coordenadas x positivas); por outro lado, nos quadrantes II e III as abcissas

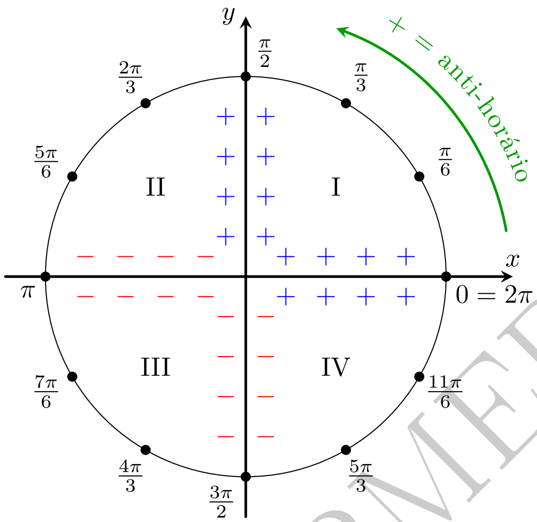


Figura 2: o círculo trigonométrico e alguns arcos positivos.

são negativas. De forma semelhante, nos quadrantes I e II temos que as ordenadas são positivas (pois os pontos do círculo situados nesses quadrantes estão acima do eixo-x, ou seja, na direção positiva do eixo-y), enquanto que nos quadrantes III e IV as ordenadas são negativas.

Partindo do ponto $A(1, 0)$ e caminhando sobre o círculo no sentido anti-horário (positivo), marcamos os valores que aparecem da Figura 2 ($\pi/6, \pi/3, \pi/2, \ldots$), que indicam a medida algébrica do arco que vai de A até o ponto correspondente. Por outro lado, partindo de A e caminhando sobre o círculo no sentido horário (negativo), marcamos os valores que aparecem da Figura 3 ($-\pi/6, -\pi/3, -\pi/2, \ldots$). Lembre-se de que o comprimento total do círculo trigonométrico é 2π.

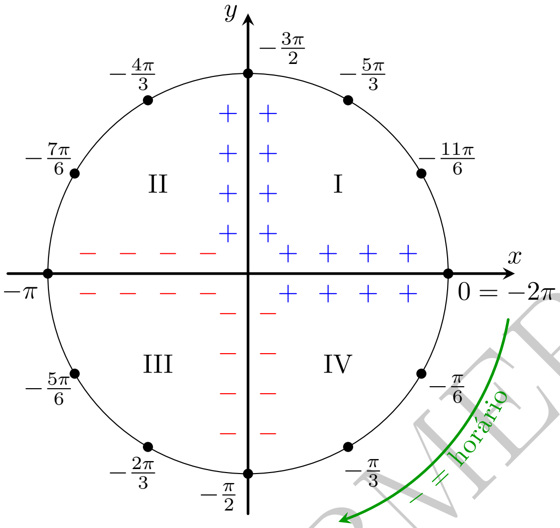


Figura 3: o círculo trigonométrico e alguns arcos negativos.

2 Linhas trigonométricas

Para todo ponto P sobre o círculo trigonométrico, o comprimento de $\widehat{AP}$ é igual à medida de $\angle AOP$ em radianos. Assim, os números indicados sobre o círculo da Figura 2 também representam ângulos. Um ponto crucial é que podemos obter o seno, o cosseno e a tangente desses ângulos usando o círculo trigonométrico, como veremos a seguir.

A Figura 4, nos mostra um ponto P associado ao ângulo α (ou ao arco $\widehat{AP}$, o que é o mesmo). Como $0 < \alpha < \pi/2$, temos que P pertence ao primeiro quadrante do círculo trigonométrico.

No módulo "Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo: Seno, Cosseno e Tangente" do Nono Ano, já havíamos definido o que são o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo entre 0° e 90°, usando triângulos retângulos. Traduzindo aquela definição para radianos, seja α um dos ângulos de um

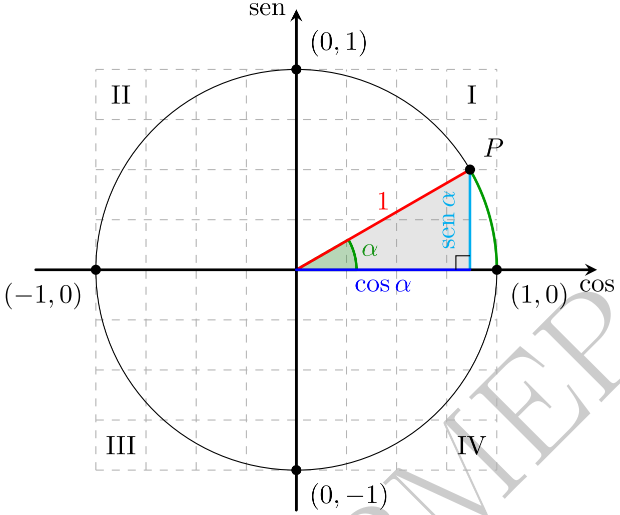


Figura 4: círculo e razões trigonométricas.

triângulo retângulo, de forma que, em radianos, $0 < \alpha < \pi/2$. Então, temos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}.$$

Traçando a perpendicular de P ao eixo-x, obtemos um triângulo retângulo (destacado em cinza, na Figura 4); como a hipotenusa desse triângulo é um raio, ela mede 1. Dessa forma, pela fórmula de $\cos\alpha$ acima, o valor de $\cos\alpha$ é igual ao comprimento do cateto adjacente a α. Note, também pela figura, que esse comprimento é igual à abcissa do ponto P, ou seja, à coordenada x desse ponto. Analogamente, o valor de $\operatorname{sen}\alpha$ é igual à coordenada y de P. Ou seja,

$$P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha). \tag{1}$$

Por essa razão, renomeamos os eixos de nossa figura como o eixo dos cossenos (horizontal) e o eixo dos senos (vertical). (Na próxima aula, veremos também como obter a tangente de α usando o círculo trigonométrico).

Veja que as definições de seno, cosseno e tangente com base no triângulo retângulo se aplicam apenas para ângulos (ou arcos) entre 0 e $\pi/2$ radianos. Dado um arco α fora deste intervalo, define-se o seno e o cosseno de α estendendo o que fizemos acima. Mais precisamente, consideramos o ponto P do círculo trigonométrico associado a α e simplesmente *definimos* $\cos\alpha$ como a abcissa de P e $\operatorname{sen}\alpha$ como a ordenada de P, de modo que a equação 1 seja satisfeita para todo α.

Assim é que, para o arco $\alpha = \pi/2$, temos que o ponto P associado a α é $P = (0, 1)$; logo, definimos $\cos(\pi/2) = 0$ e $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Da mesma forma, $\cos\pi = -1$ e $\operatorname{sen}\pi = 0$, $\cos(3\pi/2) = 0$ e $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$, $\cos(2\pi) = 1$ e $\operatorname{sen}(2\pi) = 0$. (Verifique esses valores, identificando as coordenadas dos pontos associados a tais arcos no círculo trigonométrico.)

A Figura 5 mostra um exemplo com P no segundo quadrante, isto é, com $\pi/2 < \alpha < \pi$. Veja que, nesse caso, temos $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$. Em geral, os sinais de $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ correspondem aos sinais das abscissas e ordenadas em cada quadrante, conforme mostrado na Figura 2.

Ainda nas notações da Figura 5, se $\beta = \pi - \alpha$, então $0 < \beta < \pi/2$, de modo que $\cos\beta > 0$ e $\operatorname{sen}\beta > 0$. Por outro lado, observando o triângulo retângulo sombreado, temos $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\beta = |\cos\alpha|$, de sorte que $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$.

Uma análise similar, com α pertencente a outro quadrante qualquer do círculo trigonométrico, mostra que as fórmulas acima valem sempre, isto é, que

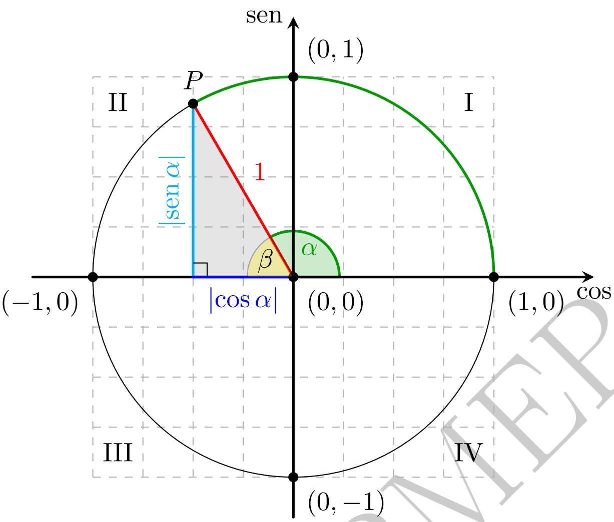


Figura 5: seno e cosseno no segundo quadrante.

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha. \tag{2}$$

3 Congruência de arcos

Conforme a discussão anterior já sugere, muitas vezes será conveniente trabalharmos com ângulos/arcos maiores do que 2π, bem como com ângulos/arcos negativos. Por exemplo, o que significa um arco de $450°$? Como $450 = 360+90$, percorrer um arco de $450°$ sobre o círculo é o mesmo que percorrer $360°$ seguido de $90°$, ou seja, dar uma volta completa seguida de um quarto de volta. Assim, um arco (no sentido anti-horário) que mede $450°$ e possui o ponto $A = (1{,}0)$ como extremidade inicial terá sua extremidade final no ponto $B = (0, 1)$ — que também é a extremidade final de um arco de ângulo central

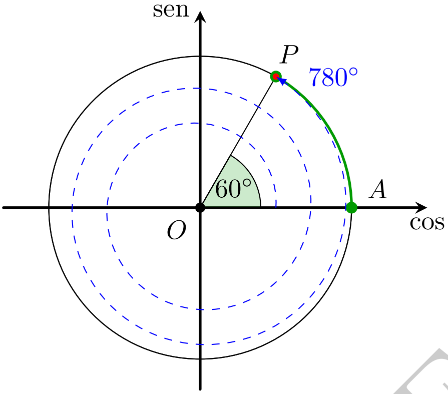
$90°$, medido no sentido anti-horário a partir de A.

Evidentemente, toda a discussão do parágrafo anterior também faz sentido em radianos: como $450° = 5\pi/2$ e $5\pi/2 = 2\pi + \pi/2$, percorrer um arco de $5\pi/2$ radianos no sentido anti-horário e a partir de $A = (1, 0)$ nos leva ao ponto $B = (0, 1)$ como extremidade final, ponto este que também é a extremidade final de um arco de $\pi/2$, medido no sentido anti-horário a partir de A.

Quando (como acima) dois ângulos/arcos possuem as mesmas extremidades, dizemos que eles são *congruentes*. Perceba que o arco $\widehat{AB}$ também é congruente ao arco $\widehat{BA}$; este último pode ser obtido partindo de A e percorrendo $360 - 90 = 270$ graus no sentido horário.

Como arcos congruentes possuem as mesmas extremidades, a diferença entre eles corresponde a um certo número de voltas completas em torno do círculo trigonométrico, e isso vale mesmo no caso em que um ou ambos os arcos são negativos. Por exemplo, outra maneira de perceber que $-3\pi/2$ e $\pi/2$ são arcos congruentes é observando que $\pi/2 - (-3\pi/2) = 2\pi$, o que corresponde a uma volta completa em torno do círculo trigonométrico. Assim, um arco de $\pi/2$ radianos pode ser obtido primeiro percorrendo um arco de $-3\pi/2$ radianos e, em seguida (e a partir da extremidade final desse arco), percorrendo um arco, no sentido anti-horário, de 2π radianos.

Para outro exemplo, ângulos de medidas $780°$ e $60°$ são congruentes. Realmente, como $780 = 60 + 2 \cdot 360$, temos que um ângulo de $780°$ é obtido percorrendo $60°$ e mais duas voltas completas, como indicado na próxima figura.



De modo geral, se α e β são as medidas em radianos de dois arcos (positivos ou negativos), temos α e β congruentes se, e somente se,

$$\alpha - \beta = 2\pi \cdot k,$$

para algum número inteiro k.

Em particular, se $\widehat{AP} = \alpha$ e $\widehat{AQ} = \beta$ são dois arcos congruentes no ciclo trigonométrico, então $P = Q$ e, dessa forma, *arcos congruentes possuem os mesmos senos e os mesmos cossenos*. Em símbolos,

$$\alpha - \beta = 2\pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \\ \cos\alpha = \cos\beta \end{cases} .$$

$$\alpha - \beta = 2\pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}\ \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta, \\ \cos\alpha = \cos\beta. \end{cases}$$

Exemplo 1. *Seja $A = (1, 0)$. Encontre o comprimento do arco $\widehat{AP}$, entre 0 e 2π, que é congruente a $27\pi/4$ radianos. Em seguida, indique em qual quadrante do círculo trigonométrico se encontra o ponto P e calcule o seno e o cosseno de $27\pi/4$.*

Solução. Veja que

$$\frac{27\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4} = 2\pi \cdot 3 + \frac{3\pi}{4}.$$

Isso quer dizer que, saindo do ponto A e percorrendo sobre o círculo um comprimento de $27\pi/4$ no sentido anti-horário, damos 3 voltas completas no círculo e, depois, ainda percorreremos $3\pi/4$ (também no sentido anti-horário). Logo, $\widehat{AP}$ mede $3\pi/4$.

Por fim, veja que $\dfrac{\pi}{2} \leq \dfrac{3\pi}{4} \leq \pi$, de sorte que o ponto P está situado no segundo quadrante (ou seja, no quadrante II) do círculo trigonométrico. Como $\pi - 3\pi/4 = \pi/4$ radianos, que correspondem a 45 graus, pelo que estudamos na seção anterior, fazendo $\alpha = 3\pi/4$ e $\beta = \pi/4$ temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{27\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\left(\frac{27\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

□

A **menor determinação positiva** de um arco α é o valor do menor arco não-negativo β que é congruente a ele. De outra forma, devemos ter $0 \leq \beta < 2\pi$ e $\alpha - \beta = 2\pi \cdot k$, para algum inteiro k. Por outro lado, a **maior determinação negativa** de α é o arco $\gamma < 0$ de menor valor absoluto tal que, (saindo de A e) percorrendo o comprimento $|\gamma|$ no sentido horário, chegamos a P. Evidentemente, $\beta - \gamma = 2\pi$.

Exemplo 2. *Calcule o arco, em radianos, equivalente a um ângulo de* $1500°$*. Em seguida, encontre a menor determinação positiva e a maior determinação negativa desse arco.*

Solução. Primeiramente, veja que, em radianos, o ângulo de $1500°$ corresponde a

$$\frac{1500}{360} \cdot 2\pi = \frac{25\pi}{3}$$

radianos.

Para calcular a menor determinação positiva desse arco, dividimos 25 por 3, obtemos

$$\frac{25\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3} = 2\pi \cdot 4 + \frac{\pi}{3}.$$

Portanto, a menor determinação positiva é $\frac{\pi}{3}$ e a maior determinação negativa é

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}.$$

$\square$

Exemplo 3. *Calcule o valor de* $\text{sen}(1560°)$ *e* $\cos(1560°)$.

Solução. Primeiramente, vamos calcular a menor determinação positiva de 1560°. Podemos fazer isso diretamente em graus (sem a necessidade de converter para radianos), calculando o resto da divisão de 1560 por 360.

Veja que

$$\begin{array}{r|l} 1\,5\,6\,0 & 3\,6\,0 \\ \cline{2-2} -\,1\,4\,4\,0 & 4 \\ \cline{1-1} 1\,2\,0 & \end{array}.$$

Assim $1560 = 4 \times 360 + 120$. Ou seja, 1560° é congruente a 120°, que é um ângulo do terceiro quadrante. Logo,

$$\text{sen}(1560°) = \text{sen}(120°) \quad \text{e} \quad \cos(1560°) = \cos(120°).$$

Agora, observe que 120° é um angulo localizado no segundo quadrante. Usando a equação(2), com ângulos convertidos para graus, ou observando a Figura 5,temos que:

$$\text{sen}(120°) = \text{sen}(180° - 120°) = \text{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos(120°) = -\cos(180° - 120°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja abordado em um ou dois encontros de 50 minutos. A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.