# Material Teórico - Módulo de FRAÇÕES, O PRIMEIRO CONTATO

## Frações e Potenciação

### Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

Portal da Matemática
OBMEP

# 1 Potenciação

Nesta aula, aprenderemos sobre *potenciação de frações*. A potenciação nada mais é do que a operação composta de diversas operações de multiplicação. Em outras palavras, a potenciação é o resultado da operação de multiplicação, quando esta é realizada diversas vezes. De maneira geral, dados um número natural $n$ e uma fração $\frac{a}{b}$, com $a$ e $b$ naturais, definimos o número $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ como o resultado de $\frac{a}{b}$, multiplicado por $\frac{a}{b}$, multiplicado por $\frac{a}{b}$, multiplicado por $\frac{a}{b}$, ..., multiplicado por $\frac{a}{b}$, em que o processo de multiplicação envolve $n$ cópias da fração $\frac{a}{b}$. Em símbolos, temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ vezes}}. \tag{1}$$

Na definição acima, dizemos que $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ é a **potência** de **base** $\frac{a}{b}$ e **expoente** $n$; dizemos também que, na potência $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, a fração $\frac{a}{b}$ está **elevada** a $n$. Vejamos um exemplo.

**Exemplos 1.**

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

Os dois exemplos acima transparecem a primeira propriedade de potenciação de frações, a qual é, em última análise, consequência direta da definição (1):

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.} \tag{2}$$

Em palavras, a potência da fração $\frac{a}{b}$ com expoente $n$ é a fração na qual o numerador é $a^n$ e o denominador é $b^n$. Realmente,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ vezes}} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ vezes}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

**Observação 2.** *Como caso particular de* (2)*, temos que toda fração elevada a* 1 *é igual a ela mesma. Isto é,*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}.$$

**Observação 3.** *Por razões que ficarão claras quando estudarmos números inteiros,* convencionamos *que toda fração elevada a* 0 *é igual a* 1*. Em símbolos,*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1.$$

**Observação 4.** *É importante destacar a relevância do uso dos parênteses para a notação de potências de uma fração. Realmente, uma notação como*

$$\frac{a}{b}^n$$

*poderia ser facilmente confundida com*

$$\frac{a^n}{b}$$

*a qual representa uma fração diferente de* $\left(\frac{a}{b}\right)^n$*. Por isso,* ***não se esqueça dos parênteses!***

Outra propriedade de potenciação de frações que é uma consequência direta da definição é a seguinte:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}.} \tag{3}$$

Em palavras, para realizarmos o produto de duas potências **de mesma base** fracionária, repetimos a base e **somamos** os expoentes.

**Exemplos 5.**

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^7 = \left(\frac{2}{5}\right)^{10}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

Mais geralmente, (3) decorre de que

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ vezes}} \cdot \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{m \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{m+n \text{ vezes}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}.\end{aligned}$$

Uma terceira propriedade importante trata sobre frações cujos numerador e denominador são potências de uma mesma base:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \text{se } m \geq n.} \tag{4}$$

Tal propriedade é uma consequência direta do cancelamento dos fatores comuns ao denominador e ao numerador da fração. Veja:

$$\begin{aligned}\frac{a^m}{a^n} &= \frac{\overbrace{\cancel{a \cdot a \cdots a}}^{n \text{ vezes}} \cdot \overbrace{a \cdots a}^{m-n \text{ vezes}}}{\underbrace{\cancel{a \cdot a \cdots a}}_{n \text{ vezes}}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-n \text{ vezes}} = a^{m-n}.\end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos uma propriedade análoga quando os expoentes $m$ e $n$ são tais que $m < n$:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \quad \text{se } m < n.} \tag{5}$$

Para entender melhor os argumentos e as fórmulas literais acima, vejamos mais alguns exemplos.

**Exemplos 6.**

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{\cancel{3 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3 \cdot 3}} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27.$$

$$\frac{7^6}{7^4} = \frac{\cancel{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}} = 7 \cdot 7 = 49.$$

$$\frac{10^3}{10^5} = \frac{\cancel{10 \cdot 10 \cdot 10}}{\cancel{10 \cdot 10 \cdot 10} \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100}.$$

*Mais resumidamente, podemos reescrever os cálculos acima da seguinte forma equivalente:*

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{\cancel{3^2} \cdot 3^3}{\cancel{3^2}} = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27.$$

$$\frac{7^6}{7^4} = \frac{\cancel{7^4} \cdot 7^2}{\cancel{7^4}} = 7^2 = 7 \cdot 7 = 49.$$

$$\frac{10^3}{10^5} = \frac{\cancel{10^3}}{\cancel{10^3} \cdot 10^2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100}.$$

A seguir, faremos dois exercícios para fixar o conteúdo lecionado até aqui.

**Exercício 7.** *Qual é a quinta parte do número $5^{555}$?*

**Solução.** Para obtermos a quinta parte de um determinado número, basta dividi-lo por 5. Assim fazendo, obtemos:

$$\frac{5^{555}}{5} = \frac{5^{555}}{5^1} = 5^{555-1} = 5^{554}.$$

□

**Exercício 8 (OBM).** *Qual é a soma dos algarismos do número*

$$\frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{2^4}{2^3} + \cdots + \frac{2^{2005}}{2^{2004}} + \frac{2^{2006}}{2^{2005}}?$$

**Solução.** Observe que cada uma das frações da expressão acima é formada por um numerador e um denominador que é são potências de 2. Mais ainda, a diferença entre os expoentes é sempre igual a 1. Utilizando várias vezes a propriedade (4), não é difícil perceber que cada uma das frações é, na verdade, igual a 2. De fato, para todo natural $k$, aquela propriedade garante que

$$\frac{2^{k+1}}{2^k} = 2^{(k+1)-k} = 2^1 = 2.$$

Então, como temos um total de 2005 frações, concluímos que o número do enunciado é igual a

$$\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{2005 \text{ vezes}} = 2 \cdot 2005 = 4010,$$

Logo, a soma de seus algarismo é $4 + 0 + 1 + 0 = 5$. □

A quarta propriedade de potenciação, que apresentamos a seguir, é conhecida como *potência de uma potência*. Trata-se, portanto, de uma operação composta de duas potenciações. Em símbolos, ela afirma que:

$$\boxed{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n},} \tag{6}$$

para todos $a, b, m, n$ naturais. Em palavras, ao calcularmos uma potência de outra potência, mantemos a base e multiplicamos os expoentes.

**Exemplos 9.**

$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2 \cdot 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}.$$

$$\left(\left(\frac{3}{10}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{3}{10}\right)^{2 \cdot 3} = \left(\frac{3}{10}\right)^6 = \frac{3^6}{10^6} = \frac{729}{1000000}.$$

Para ver porque tal propriedade resulta verdadeira, consideremos primeiramente o caso particular em que $b = 1$, verificando que, para $a, m, n$ naturais, temos

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}. \tag{7}$$

Realmente,

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}^{n \text{ vezes}} \\
&= \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ vezes}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ vezes}}}_{n \text{ vezes}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ vezes}} \text{ vezes}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{mn \text{ vezes}} \\
&= a^{m \cdot n}.
\end{aligned}$$

Em seguida, basta utilizarmos o fato acima, aplicando (2) três vezes:

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a^m}{b^m}\right)^n = \frac{(a^m)^n}{(b^m)^n} = \frac{a^{m \cdot n}}{b^{m \cdot n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}.$$

**Observação 10.** *É importante ter muito cuidado para não confundir a potenciação de uma potência com um expoente que é uma potência. Por exemplo,*

$$2^{(3^4)} \neq (2^3)^4.$$

*De fato, no primeiro número a base é* 2 *e o expoente é* $3^4 = 81$*; por outro lado, graças a* (7)*, o segundo número é igual a* $2^{3\cdot 4} = 2^{12}$.

A seguir, apresentaremos a última propriedade da operação de potenciação de frações, a qual relaciona o produto de duas potências com expoente iguais. Em símbolos, ela diz que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)^n. \tag{8}$$

Assim, em palavras, ao calcularmos o produto de potências de duas frações, com expoentes iguais, mantemos o expoente e multiplicamos as bases.

**Exemplos 11.**

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \left(\frac{3\cdot \cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}.$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{1\cdot \cancel{3}}{\cancel{9}_3\cdot 7}\right)^2 = \left(\frac{1}{21}\right)^2 = \frac{1}{441}.$$

**Exercício 12** (OBM 2002). *A fração* $\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ *é igual a:*

**Solução.** Primeiramente, iremos trocar a base da potência $4^8$ de 4 para 2, escrevendo $4 = 2^2$. Portanto, $4^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$. Logo, a fração pedida é equivalente a

$$\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2} = \frac{2^{4\cdot 8}}{(2^{16})^2} = \frac{2^{32}}{2^{32}} = 1.$$

□

**Exercício 13** (OBM 2010). *Dividindo-se* $4^{(4^2)}$ *por* $4^4$*, obtemos:*

**Solução.** Observe que, neste exercício, temos um expoente que é uma potência. Logo, devemos resolvê-lo primeiro: $4^2 = 16$. Portanto, podemos calcular:

$$\frac{4^4}{4^{(4^2)}} = \frac{4^4}{4^{16}} = \frac{1}{4^{16-4}} = \frac{1}{4^{12}}.$$

□

**Exercício 14.** *Qual é o quociente de* $50^{50}$ *por* $25^{25}$*?*

**Solução.** Lembre-se de que $50 = 2 \cdot 25$. Portanto,

$$50^{50} = (2\cdot 25)^{50} = 2^{50}\cdot 25^{50}$$

e, daí,

$$\frac{50^{50}}{25^{25}} = \frac{2^{50}\cdot 25^{50}}{25^{25}} = 2^{50}\cdot 25^{50-25} = 2^{50}\cdot 25^{25}.$$

□

**Exercício 15.** *Simplifique a fração* $\dfrac{8^8\cdot 4^4\cdot 2^2}{16^{16}}$.

**Solução.** Observando que todas as bases são potências de 2, podemos escrever

$$\frac{8^8\cdot 4^4\cdot 2^2}{16^{16}} = \frac{(2^3)^8\cdot (2^2)^4\cdot 2^2}{(2^4)^{16}}.$$

Utilizando a propriedade (7), concluímos que a segunda fração acima é igual a

$$\frac{2^{24}\cdot 2^8\cdot 2^2}{2^{64}}.$$

Agora, aplicando sucessivamente as propriedades (3) (com $b = 1$) e (5), obtemos

$$\frac{2^{24+8+2}}{2^{64}} = \frac{2^{34}}{2^{64}} = \frac{1}{2^{64-34}} = \frac{1}{2^{30}}.$$

□

**Exercício 16.** *Qual é o valor da soma*

$$\frac{2^{2003}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}?$$

**Solução.** Denote por $S$ a expressão dada. Trocando 4 por $2^2$, 9 por $3^2$ e aplicando novamente a propriedade (7), obtemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{2^{2003}\cdot (3^2)^{1001}}{(2^2)^{1001}\cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002}\cdot (3^2)^{1001}}{(2^2)^{1001}\cdot 3^{2003}} \\ &= \frac{2^{2003}\cdot 3^{2002}}{2^{2002}\cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002}\cdot 3^{2002}}{2^{2002}\cdot 3^{2003}}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando (4) e (5), segue que

$$\begin{aligned} S &= \frac{2^{2003}}{2^{2002}}\cdot\frac{3^{2002}}{3^{2003}} + \frac{2^{2002}}{2^{2002}}\cdot\frac{3^{2002}}{3^{2003}} \\ &= 2^{2003-2002}\cdot\frac{1}{3^{2003-2002}} + \frac{\cancel{2^{2002}}}{\cancel{2^{2002}}}\cdot\frac{1}{3^{2003-2002}} \\ &= 2\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1. \end{aligned}$$

□

## 2 Sugestões ao professor

Esta aula, apesar de ser um pouco mais técnica do que as duas primeiras, pode ser utilizada também para rever os conceitos aprendidos anteriormente. Sugerimos que, ao final da mesma e para bem da fixação por parte dos alunos, o professor faça, a título de revisão, uma rápida listagem das cinco propriedades lecionadas.