Material Teórico - Módulo: Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Exercícios Sobre Vetores

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Exercícios sobre vetores

Nesta aula, discutimos alguns exercícios sobre vetores, envolvendo o conteúdo das aulas anteriores.

Exemplo 1. *As coordenadas de dois pontos A e B no espaço são (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B), respectivamente. Encontre as coordenadas do ponto médio M do segmento AB.*

Solução: sejam (x_M, y_M, z_M) as coordenadas do ponto M. Como M é ponto médio do segmento AB, temos

$$\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}.$$

Aplicando o Teorema de Tales, obtemos as proporções

$$2 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{x_B - x_A}{x_M - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_M - y_A} = \frac{z_M - z_A}{z_B - z_A}.$$

Assim, $2x_M - 2x_A = x_B - x_A$, $2y_M - 2y_A = y_B - y_A$ e $2z_M - 2z_A = z_B - z_A$, de forma que

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \quad \text{e} \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Exemplo 2. *Dadas, no espaço, as coordenadas de três vértices consecutivos de um paralelogramo, encontre as coordenadas do quarto vértice.*

Solução: seja $ABCD$ o paralelogramo desejado (veja a figura 1), e suponhamos que as coodenadas dos vértices A, B e C sejam conhecidas: $A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B)$ e $C = (x_C, y_C, z_C)$. Queremos calcular, em função delas, as coordenadas do vértice D: (x_D, y_D, z_D).

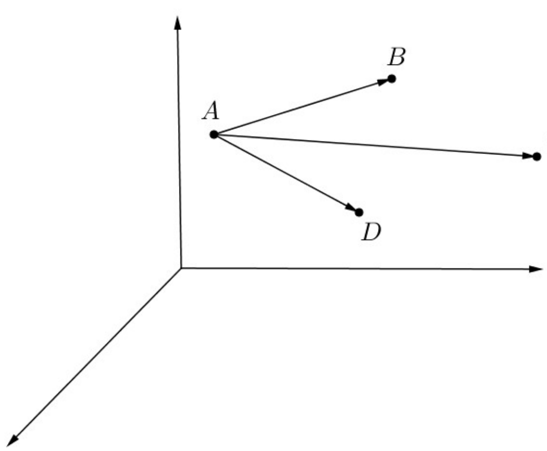

Figura 1: coordenadas do quarto vértice de um paralelogramo.

A partir da igualdade

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \tag{1}$$

(olhe novamente a figura 1), podemos encontrar as coordenadas do vértice D. Para tanto, começamos escrevendo

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A),$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A),$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A),$$

de sorte que (1) pode ser escrita como

$$\begin{gathered}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) + \\ +(x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A) = \\ = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A),\end{gathered}$$

ou ainda

$$\begin{gathered}(x_B + x_D - 2x_A, y + B + y_D - 2y_A, z_B + z_D - 2z_A) = \\ = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A).\end{gathered}$$

Comparando as coordenadas dos dois vetores acima, concluímos facilmente que

$$x_D = x_A - x_B + x_C,$$

$$y_D = y_A - y_B + y_C,$$

$$z_D = z_A - z_B + z_C.$$

Vale observar que as condições $x_A - x_B + x_C - x_D = 0$, $y_A - y_B + y_C - y_D = 0$ e $z_A - z_B + z_C - z_D = 0$ são suficientes para que $ABCD$ seja um paralelogramo, pois elas garantem que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, logo $BC \parallel AD$ e $CD \parallel AB$. $\square$

Exemplo 3. *Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero $ABCD$ são vértices de um paralelogramo.*

Prova: consideremos os vértices de $ABCD$ orientados nessa ordem e com coordenadas (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), (x_C, y_C, z_C) e (x_D, y_D, z_D). Sejam M, N, P, Q os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. As coordenadas desses pontos são, de acordo com o Exemplo 1, as médias aritméticas das coordenadas dos extremos do segmento correspondente: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$, $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$, etc.

De acordo com a discussão ao final da solução do Exemplo 2, para que $MNPQ$ seja um paralelogramo, é suficiente que $x_M - x_N + x_P - x_Q = 0$, $y_M - y_N + y_P - y_Q = 0$ e $z_M - z_N + z_P - z_Q = 0$. Vamos verificar apenas a primeira dessas igualdades, uma vez que as outras podem ser verificadas de modo análogo:

$$x_M - x_N + x_P - x_Q =$$

$$= \frac{x_A + x_B}{2} - \frac{x_B + x_C}{2} + \frac{x_C + x_D}{2} - \frac{x_D + x_A}{2} =$$

$$= \frac{x_A + x_B - x_B - x_C + x_C + x_D - x_D - x_A}{2} = 0.$$

Vale salientar que esse resultado é válido mesmo que o quadrilátero $ABCD$ seja *reverso*, isto é, não esteja contido em um plano (veja a figura 2). De fato, em momento algum utilizamos, na demonstração acima, o fato de que $ABCD$ fosse um quadrilátero plano. $\square$

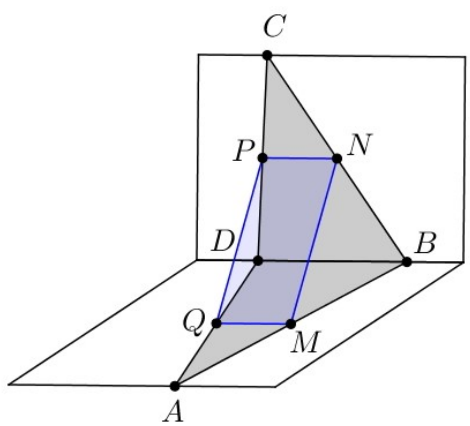

Figura 2: os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um paralelogramo.

Para o que segue, é conveniente introduzirmos os conceitos de *somas de pontos* e *mmultiplicação de um ponto por um número real*.

Sejam A e B pontos de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. Identificando cada ponto com o vetor que vai da origem O do sistema de coordenadas a esse ponto, podemos estabelecer uma *adição de pontos*: se $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, escrevemos $A + B = C$.

Assim, supondo que $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ são pontos de $\mathbb{R}^3$ e $O = (0,0,0)$, temos $C = (x_A + x_B, y_A + y_B, z_A + z_B)$. Em $\mathbb{R}^2$, a soma também é dada coordenada a coordenada.

A multiplicação de um ponto P por um número real também é definida através da identificação de P com $\overrightarrow{OP}$. Mais precisamente, se P é um ponto e α é um real, pomos $\alpha P = Q$, onde Q é o único ponto tal que $\overrightarrow{OQ} = \alpha\overrightarrow{OP}$.

Da identificação do ponto P com o vetor OP, segue que as operações entre pontos têm as mesmas propriedades que as operações entre vetores. Por exemplo, se A, B, C são pontos e α é um número real, então $A + (B + C) = (A + B) + C$, $A + B = B + A$ e $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

A diferença entre os pontos B e A é definida por $B - A = B + (-1)A$. Ela pode ser vista como o ponto D tal que $A + D = B$, e portanto tal que suas coordenadas são as diferenças entre as coordenadas de B e de A; alternativamente, ela também é tal que o vetor $\overrightarrow{OD}$ coincide com o vetor cuja origem é A e a extremidade é B, ou seja, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}$. Disso decorre a relação fundamental

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

Os conceitos de soma de pontos e multiplicação de um ponto por um número real simplificam bastante as notações envolvendo relações entre pontos, uma vez que tornam desnecessário escrever tais relações em termos de coordenadas. Por exemplo, se M é o ponto médio do segmento AB, então $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, logo $M - A = B - M$ e, daí, $M = \frac{A+B}{2}$. Assim, não precisamos escrever as coordenadas dos pontos A, B e M para expressar a relação entre os pontos. Também não precisamos especificar se os pontos estão em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Em particular, de acordo com o Exemplo 2, $ABCD$ é um paralelogramo se, e somente se,

$$A - B + C - D = 0 \tag{2}$$

A partir das observações acima, podemos definir algumas *transformações geométricas* importantes.

Por exemplo, dado um vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$ a **translação segundo $\overrightarrow{v}$** é a transformação (i.e., a função) $T_{\overrightarrow{v}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou $n = 3$) dada por

$$T_{\overrightarrow{v}}(P) = P + V.$$

A **reflexão em relação a um ponto A** é a transformação $R_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que leva um ponto P no ponto P' tal que A é o ponto médio do segmento PP'. Logo, $\overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{PA}$, o que é equivalente a $P' - A = A - P$, ou seja, $P' = 2A - P$. Assim

$$R_A(P) = 2A - P. \tag{3}$$

Usaremos essas transformações para resolver alguns dos problemas abaixo. Primeiramente, vamos provar que o baricentro de um triângulo é a "média aritmética" dos seus vértices.

Exemplo 4. *Mostre que, se G é o baricentro de um triângulo ABC, então $G = \frac{A+B+C}{3}$.*

Prova: lembremos que o baricentro de um triângulo é o ponto de interseção das três medianas do mesmo.

Sendo a mediana o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto, temos que a mediana relativa ao lado AB é o segmento CM, onde $M = \frac{A+B}{2}$.

É bem sabido que o baricentro G divide cada mediana na razão $2:1$, a partir do vértice. Em particular, para a mediana CM isso significa que o vetor $\overrightarrow{CG}$ tem o dobro do comprimento do vetor $\overrightarrow{GM}$, e assim $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GM}$. Por sua vez, esta última igualdade equivale a $G - C = 2(M - G)$, logo a $G - C = 2M - 2G$. Portanto, $3G = 2M + C = A + B + C$, ou seja,

$$G = \frac{A+B+C}{3}.$$

Exemplo 5. *Dado um triângulo ABC, encontre um ponto P tal que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$. Esse ponto é único?*

Solução: a igualdade $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = 0$ pode ser rescrita como

$$(P - A) + (P - B) + (P - C) = 0,$$

que é equivalente a $3P = A + B + C$, ou seja,

$$P = \frac{A+B+C}{3}.$$

Isso significa que o baricentro do triângulo ABC satisfaz a condição do problema, e que qualquer ponto que satisfaça essa condição é, necessariamente, o baricentro. Assim, existe um único ponto P que satisfaz a condição do problema, a saber, o baricentro do triângulo. □

O problema a seguir tem forte conexão com o exemplo 3.

Exemplo 6. *Considere três pontos não colineares A, B e C. Sejam R_A, R_B e R_C as reflexões em relação a A, B e C, respectivamente. Sejam (veja a figura 3) $P_1 = R_A(P), P_2 = R_B(P_1)$ e $P_3 = R_C(P_2)$. Mostre que o ponto médio D do segmento PP_3 é tal que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.*

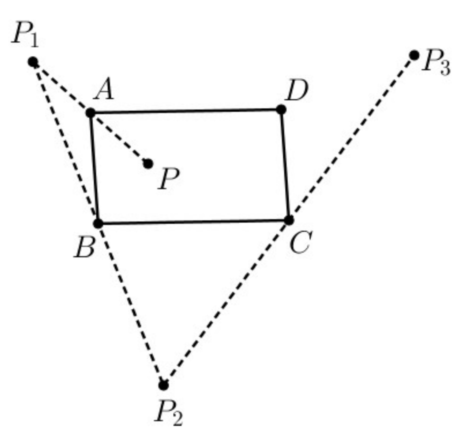

Figura 3: reflexões sucessivas de um ponto em relação aos vértices de um paralelogramo.

Prova: De acordo com (3), temos

$$P_1 = R_A(P) = 2A - P,$$

$$\begin{aligned} P_2 &= R_B(P_1) = 2B - P_1 \\ &= 2B - (2A - P) \\ &= 2B - 2A + P, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_3 &= R_C(P_2) = 2C - P_3 \\ &= 2C - (2B - 2A + P) \\ &= 2C - 2B + 2A - P. \end{aligned}$$

Agora, se D é o quarto vértice do paralelogramo $ABCD$, vimos que $A - B + C - D = 0$, ou seja, $D = A - B + C$. Assim,

$$P_3 = 2(A - B + C) - P = 2D - P,$$

de modo que, novamente por (3), P_3 é a reflexão de P em relação a D. Em particular, isso garante que D é ponto médio do segmento PP_3. □

Nos dois próximos exemplos, vamos construir, a partir de um polígono dado, outro polígono com o mesmo número de lados e cujos vértices são baricentros de certos triângulos formados a partir dos vértices do polígono original. Veremos que o polígono resultante goza de certa "regularidade" (no exemplo 7) ou é semelhante ao polígono original (no exemplo 8).

Exemplo 7. *Dado um hexágono $ABCDEF$ (veja a figura 4), sejam G, H, I, J, K, L os baricentros dos triângulos BCD, CDE, DEF, EFA, FAB e ABC, respectivamente. Mostre que os lados opostos do hexágono $GHIJKL$ são paralelos e têm mesmos comprimentos.*

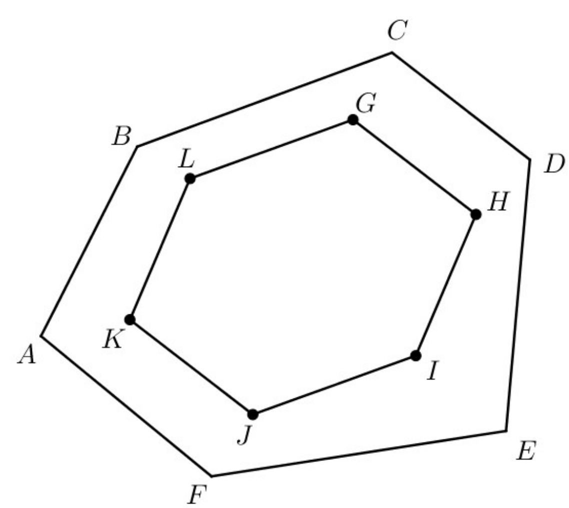

Figura 4: o hexágono $GHIJKL$ tem baricentros por vértices.

Prova: de acordo com o Exemplo 4, temos $G = \frac{B+C+D}{3}$, $H = \frac{C+D+E}{3}$, $I = \frac{D+E+F}{3}$, $J = \frac{E+F+A}{3}$, $K = \frac{F+A+B}{3}$ e $L = \frac{A+B+C}{3}$.

Queremos mostrar que os lados opostos, vistos como segmentos orientados, representam os mesmos vetores, ou seja, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IH}$, $\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{JI}$ e $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{KJ}$. Vamos mostrar a validade apenas da primeira dessas igualdades, podendo as outras serem demonstradas de modo similar.

A igualdade $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IH}$ é equivalente a $L - K = H - I$, ou seja, a $L + I = H + K$. Mas, pelo que vimos acima,

$$\begin{aligned} L + I &= \frac{A+B+C}{3} + \frac{D+E+F}{3} \\ &= \frac{A+B+C+D+E+F}{3}, \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} H + K &= \frac{C+D+E}{3} + \frac{F+A+B}{3} \\ &= \frac{A+B+C+D+E+F}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, vale a igualdade procurada. □

Exemplo 8. *Dado um quadrilátero $ABCD$, sejam (veja a figura 5) A', B', C', D' dos baricentros dos triângulos BCD, CDA, DAB e ABC, respectivamente. Mostre que $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são semelhantes e calcule a razão de semelhança.*

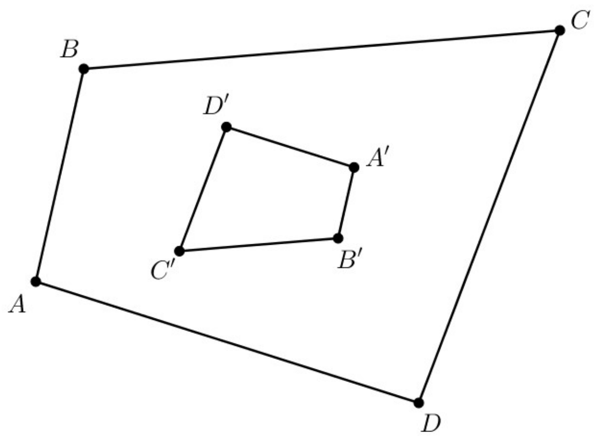

Figura 5: os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são semelhantes.

Prova: assim como fizemos no exemplo anterior, podemos usar a informação do Exemplo 4 para escrever $A' = \frac{B+C+D}{3}$, $B' = \frac{C+D+A}{3}$, $C' = \frac{D+A+B}{3}$ e $D' = \frac{A+B+C}{3}$.

Veja, agora, que

$$B' - A' = \frac{C+D+A}{3} - \frac{B+C+D}{3} = -\frac{1}{3}(A - B),$$

$$D' - C' = \frac{A+B+C}{3} - \frac{D+A+B}{3} = -\frac{1}{3}(C - D),$$

$$C' - B' = \frac{D+A+B}{3} - \frac{C+D+A}{3} = -\frac{1}{3}(B - C)$$

e

$$A' - D' = \frac{B+C+D}{3} - \frac{A+B+C}{3} = -\frac{1}{3}(D - A).$$

Portanto, os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são semelhantes, com razão de semelhança $-1/3$. A razão de semelhança é negativa, pois há uma *mudança na orientação* quando passamos de um quadrilátero para o outro. □

Sejam A um ponto dado e R_A a reflexão em relação a esse ponto. Para todo ponto P, se $R_A(P) = P'$, então $R_A(P') = P$; logo, $R_A(R_A(P)) = P$ para todo ponto P, isto é, após duas aplicações de R_A, voltamos ao ponto inicial. Vejamos o que ocorre quando consideramos as reflexões em relação a dois pontos distintos, aplicadas sucessiva e alternadamente.

Exemplo 9. *Sejam A e B dois pontos distintos, e seja P um ponto diferente de A e de B. Seja P_1 a reflexão de P em relação a A, P_2 a reflexão de P_1 em relação a B, P_3 a reflexão de P_2 em relação a A, etc (na figura 6, ilustramos os sete primeiros desses pontos). Mostre que os pontos P_n, com n ímpar são todos colineares e que os pontos P_m com m par, também são todos colineares.*

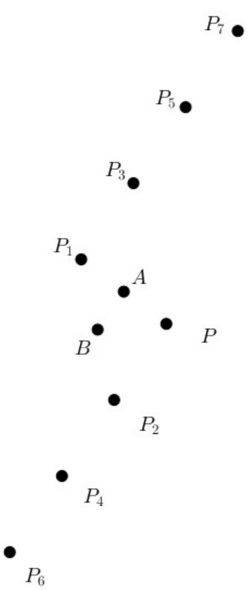

Figura 6: os pontos P_i são obtidos a partir de P por reflexões sucessivas em relação a A e B, alternadamente.

Prova: pelo que já vimos, podemos escrever

$$P_1 = R_A(P) = 2A - P,$$

$$P_2 = R_B(P_1) = 2B - (2A - P) = 2(B - A) + P,$$

$$P_3 = R_A(P_2) = 2A - (2B - 2A + P) = 4A - 2B - P,$$

$$P_4 = R_B(P_3) = 2B - (4A - 2B - P) = 4(B - A) - P,$$

$$P_5 = R_A(P_4) = \ldots = 6A - 4B + P.$$

Dos casos iniciais acima, emerge o seguinte padrão:

$$k \text{ ímpar } \Rightarrow P_k = (k+1)A - (k-1)B + P;$$

$$k \text{ ímpar } \Rightarrow P_k = k(B - A) + P.$$

Vamos mostrar que $\overrightarrow{P_nP_{n+2}} = \overrightarrow{P_{n+2}P_{n+4}}$, o que implica que os pontos P_n, P_{n+2} e P_{n+4} são colineares e que P_{n+2} é o ponto médio do segmento P_nP_{n+4}.

Primeiramente, note que

$$\overrightarrow{P_nP_{n+2}} = \overrightarrow{P_{n+2}P_{n+4}} \Leftrightarrow P_{n+2} - P_n = P_{n+4} - P_{n+2}.$$

Agora, para n par, temos que $n + 2$ e $n + 4$ também são pares. Portanto,

$$\begin{aligned} P_{n+2} - P_n &= (n+2)(B - A) + P - \big(n(B - A) + P\big) \\ &= 2(B - A) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_{n+4} - P_{n+2} &= (n+4)(B - A) + P - \\ &\quad - \big((n+2)(B - A) + P\big) \\ &= 2(B - A). \end{aligned}$$

Para n ímpar, a verificação é similar e deixamos essa tarefa ao dileto leitor.

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

As operações entre pontos simplificam bastante a notação e são muito úteis para *algebrizar* problemas geométricos envolvendo vetores. No entanto, se você preferir, pode manter a notação de coordenadas, pelo menos num primeiro momento.

A grande vantagem de se considerar adição de pontos é que a operação algébrica fica definida diretamente sobre o objeto geométrico, sendo desnecessária a escolha de um sistema de coordenadas. Esse é um dos pilares de uma área da Matemática conhecida como *Álgebra Linear*, que tem ramificações e aplicações em Geometria, em Análise e na própria Álgebra. Aqui, como em tantas outras oportunidades, aparece uma noção profunda da Matemática que pode ser tratada de modo elementar e relativamente simples. Essas oportunidades devem ser muito bem aproveitadas pelo professor.

Também são apresentadas aqui as translações e reflexões em relação a um ponto, que podem ser usadas para resolver problemas geométricos. Os exemplos aqui apresentados dão apenas uma ideia inicial do poder que esses métodos têm.

Sugestões de Leitura Complementar

1. J. L. M. Barbosa. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.
3. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.