

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 1

Monotonicidade, Máximos e Mínimos - Parte 1

Tópicos Adicionais

Autores: Profs. Angelo Papa Neto

Tiago Caúla Ribeiro

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

23 de agosto de 2026



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 Funções monótonas

No decorrer desta seção, I denotará um subconjunto de $\mathbb{R}$ com mais de um ponto (um intervalo não degenerado, por exemplo) e f indicará uma função real de domínio I , ou seja, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Dizemos que f é:

- (i) **crescente** se

$$\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y);$$

- (ii) **decrecente** se

$$\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) > f(y);$$

- (iii) **não decrecente** se

$$\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y);$$

- (iv) **não crescente** se

$$\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Uma função que satisfaz uma das quatro condições acima é chamada **monótona**.

Observação 1.

- i) Uma função f é crescente se, e só se, sua função oposta $-f$ é decrecente. Também, f é não decrecente se, e só se, $-f$ é não crescente.
- ii) Uma função crescente (resp. decrecente) é automaticamente não decrecente (resp. não crescente); contudo, a recíproca não é verdadeira, uma vez que uma função constante é não decrecente (resp. não crescente) mas não é crescente (resp. decrecente).

iii) A soma de funções monótonas f e g de um mesmo tipo resulta em uma função monótona do mesmo tipo que f e g . Por exemplo, a soma de funções crescentes é uma função crescente. Isso segue da compatibilidade da relação de ordem com respeito à adição, pois $f(x) < f(y)$ e $g(x) < g(y)$ implicam $f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$.

Uma função f não pode ser simultaneamente crescente e não decrescente, pois isso acarretaria, para $x < y$ em I , $f(x) < f(y)$ e $f(x) \geq f(y)$, o que não é possível.

Por outro lado, uma função é simultaneamente não crescente e não decrescente se, e somente se, essa função for constante. Basta notar que

$$f(x) \leq f(y), f(y) \geq f(x) \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Podemos avaliar a monotonicidade de uma função real f analisando os sinais das razões

$$R_f(x, y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad (1)$$

em que x e y são elementos *distintos* de I , o domínio de f .

De fato, temos as seguintes equivalências:

- (I) f é crescente se, e somente se, $R_f(x, y) > 0$ para quaisquer $x \neq y$ em I ;
- (II) f é decrescente se, e somente se, $R_f(x, y) < 0$ para quaisquer $x \neq y$ em I ;
- (III) f é não decrescente se, e somente se, $R_f(x, y) \geq 0$ para quaisquer $x \neq y$ em I ;
- (IV) f é não crescente se, e somente se, $R_f(x, y) \leq 0$ para quaisquer $x \neq y$ em I .

Para justificarmos essas afirmações, vejamos a conexão entre o sinal de $R_f(x, y)$ e a relação entre as desigualdades envolvendo x e y , $f(x)$ e $f(y)$.

Por exemplo, se R_f for positiva, isto é, se valer a 2ª parte de I, então o numerador e denominador de $R_f(x, y)$

têm mesmo sinal. Assim, se $x < y$, o denominador $y - x$ é positivo, o que força o numerador $f(y) - f(x)$ a também ser positivo; por sua vez, isso significa que f é crescente, de acordo com a definição dada em (i).

Reciprocamente, se f for crescente, então o numerador e o denominador da fração em (1) têm um mesmo sinal, o que implica $R_f(x, y) > 0$ para quaisquer $x \neq y$ em I . Isso demonstra a validade de (I). Por fim, o raciocínio para estabelecer os casos (II), (III) e (IV) é análogo.

Exemplo 2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = ax + b$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Se $x, y \in \mathbb{R}$ forem distintos, então

$$\begin{aligned} R_f(x, y) &= \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{ay + b - (ax + b)}{y - x} \\ &= \frac{ay - ax}{y - x} = \frac{a(y - x)}{y - x} = a. \end{aligned}$$

Dessa forma, R_f é positiva ou negativa conforme tenhamos $a > 0$ ou $a < 0$, respectivamente. Portanto, f é crescente se $a > 0$ e f é decrescente se $a < 0$. $\square$

Exemplo 3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b, c são números reais com $a > 0$. Prove que f é:

- (a) decrescente no intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$;
- (b) crescente no intervalo $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$.

Solução. De fato, se $x, y \in \mathbb{R}$ forem distintos, teremos

$$\begin{aligned} R_f(x, y) &= \frac{(ay^2 + by + c) - (ax^2 + bx + c)}{y - x} \\ &= \frac{a(y^2 - x^2) + b(y - x)}{y - x} \\ &= \frac{(y - x)[a(x + y) + b]}{y - x} \\ &= a(x + y) + b. \end{aligned}$$

Assim, para pontos distintos $x, y \in (-\infty, -\frac{b}{2a}]$, ocorre $x + y < -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{a}$, de sorte que (como $a > 0$)

$$R_f(x, y) < a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0.$$

Portanto, R_f é negativa para $x, y \in (-\infty, -\frac{b}{2a}]$ distintos, o que significa dizer que f é decrescente em $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$. De forma similar, prova-se que R_f é positiva para $x, y \in [-\frac{b}{2a}, +\infty)$, de sorte que f é crescente em $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$. $\square$

Observação 4. O exemplo anterior admite a seguinte versão para o caso em que $a < 0$:

(a') f é crescente no intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$;

(b') f é decrescente no intervalo $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$.

Para justificar as afirmações acima, basta aplicar o exemplo 3 para $-f$ e utilizar o item i) da Observação 1.

2 Máximos e mínimos

Nesta seção, I denotará um conjunto não vazio.

Um número real y_0 é um **valor mínimo** de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(a) existe $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = y_0$;

(b) $y_0 \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

Da mesma forma, um número real y_1 é um **valor máximo** de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(A) existe $x_1 \in I$ tal que $f(x_1) = y_1$;

(B) $f(x) \leq y_1$ para todo $x \in I$.

Evidentemente, y_0 (resp. y_1) satisfaz as condições (a) e (b) (resp. (A) e (B)) precisamente quando y_0 (resp. y_1) for o menor (resp. maior) elemento de $\text{Im } f$, o conjunto imagem

de f . Em particular, pela unicidade do menor (resp. maior) elemento de um conjunto (quando este existe), o valor mínimo (resp. máximo) de uma função f , se existir, será único.

Devemos observar, no entanto, que, embora os valores mínimo e máximo de uma função sejam únicos se existirem, eles podem ser imagens de mais de um elemento do domínio. Vejamos um exemplo nesse sentido.

Exemplo 5. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sin x$, tem valor mínimo igual a -1 e valor máximo igual a 1 . Esses valores são atingidos uma infinidade de vezes pela função. De fato, para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$\sin\left(\frac{(4k+3)\pi}{2}\right) = -1 \quad e \quad \sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right) = 1.$$

□

Conforme antecipamos acima, uma função pode não ter valor mínimo e/ou máximo.

Exemplo 6. A função $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, admite valor máximo 1 mas não admite valor mínimo.

Solução. Se $x \in [1, +\infty)$, então $x \geq 1$; logo,

$$f(x) = \frac{1}{x} \leq 1 = f(1),$$

de modo que $y_1 = 1$ é o valor máximo de f .

Por outro lado, f não admite valor mínimo, ou seja, nenhum valor na imagem de f é menor que todos os outros. De fato, dado x no domínio de f , temos que $2x$ também é um ponto desse domínio, com

$$f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{2x} = f(2x).$$

□

Deixamos como exercício para o leitor verificar que as funções $g : (-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, de mesmas

regras que f (ou seja, $g(x) = 1/x$ e $h(x) = 1/x$ para cada x nos respectivos domínios), são tais que g admite valor mínimo -1 mas não admite valor máximo e h não admite nem valor mínimo nem valor máximo.

Quando precisamos falar sobre o valor máximo ou mínimo de uma função f sem especificar se esse valor é o máximo ou o mínimo, costumamos nos referir a tal número como um **valor extremo** de f .

Um critério simples, porém útil, para determinar valores extremos de uma função é o seguinte. *Fixado $x_0 \in I$, sejam $I_- := I \cap (-\infty, x_0]$, $I_+ := I \cap [x_0, +\infty)$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é decrescente em I_- e crescente em I_+ . Então, $f(x_0)$ é o valor mínimo de f , o qual é assumido apenas no ponto x_0 .*

Do mesmo modo, nas notações acima, *se f for crescente em I_- e decrescente em I_+ , então $f(x_0)$ será o valor máximo de f , o qual é assumido apenas no ponto x_0 .*

O leitor pode obter outras versões desse critério combinando as condições “não crescente” e “não decrescente”, respectivamente, em I_- e I_+ , ou vice-versa.

Com base na discussão acima, no Exemplo 3/Observação 4 e nos cálculos da parte 1 do material anterior¹, obtemos o seguinte resultado a respeito dos valores extremos de funções quadráticas.

Proposição 7. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática dada por*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Se $\Delta = b^2 - 4ac$, então o único valor extremo de f é $y_e = -\frac{\Delta}{4a}$, assumido apenas no ponto $x_e = -\frac{b}{2a}$. Além disso:

- (a) *se $a > 0$, então y_e é o valor mínimo de f ;*
- (b) *se $a < 0$, então y_e é o valor máximo de f .*

A proposição 7 permite apresentar várias aplicações interessantes. Exibiremos uma delas no exemplo 3 da parte 2 dessa aula, remetendo o leitor às referências para outras tantas.

¹Vide seção 3.3 do material *Funções e Imagem - Parte 1*.

2.1 Desigualdades e valores extremos

Nesta seção, mostraremos como obter os valores mínimo e máximo de uma função real linear em duas variáveis definida sobre um círculo. Para tanto, começamos discutindo a *desigualdade de Cauchy*.

Se a, b, c e d forem números reais, então, efetuando a multiplicação $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ e completando quadrados, obtemos

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \\&= [(ac)^2 + (bd)^2] + [(ad)^2 + (bc)^2] \\&= [(ac)^2 + 2(ac)(bd) + (bd)^2] \\&\quad + [(ad)^2 - 2(ad)(bc) + (bc)^2] \\&= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.\end{aligned}$$

A igualdade

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \quad (2)$$

é conhecida como **identidade de Euler**.

A partir de (2), e notando que $(ad - bc)^2 \geq 0$, obtemos

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2. \quad (3)$$

Essa desigualdade é uma igualdade só quando $ad - bc = 0$, ou seja (assumindo que $c, d \neq 0$), só quando $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Extraindo raízes quadradas, vemos que a desigualdade (3) é equivalente a

$$|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}, \quad (4)$$

em que as barras verticais indicam o valor absoluto. Sendo $c, d \neq 0$, a condição para que ela se torne uma igualdade continua a mesma: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

A desigualdade (4) é caso particular da desigualdade mais geral

$$|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}, \quad (5)$$

para $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$, desde que nenhum denominador se anule.

Chamamos (5) de **desigualdade de Cauchy**. Na generalidade acima, não demonstraremos essa desigualdade. O leitor interessado encontrará duas demonstrações diferentes na sugestão de leitura complementar [2] e uma terceira na sugestão de leitura complementar [4]. Aqui, nossa intenção é exibir uma aplicação da desigualdade (4) a máximos e mínimos de funções.

Exemplo 8. No plano cartesiano, seja S o círculo de centro na origem e raio 1, de sorte que

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Sejam a e b constantes reais não nulas e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y) = ax + by$. Encontre, se existirem, os valores máximo e mínimo de f .

Solução. Encontraremos os pontos do círculo S para os quais a função f atinge seus extremos, bem como tais valores extremos.

Da desigualdade (4) segue que

$$|f(x, y)| = |ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

pois $x^2 + y^2 = 1$. Isso significa que

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq f(x, y) \leq \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (6)$$

Para que $-\sqrt{a^2 + b^2}$ seja o valor mínimo de f , resta mostrar que existe um ponto (x_0, y_0) do círculo tal que $f(x_0, y_0) = -\sqrt{a^2 + b^2}$. Da mesma forma, para que $\sqrt{a^2 + b^2}$ seja o valor máximo de f , temos de mostrar que existe um ponto (x'_0, y'_0) do círculo tal que $f(x'_0, y'_0) = \sqrt{a^2 + b^2}$. Faremos isto examinando se as desigualdades em (6) podem tornar-se igualdades.

Uma vez que (6) foi obtida com o uso de (4), para que (6) seja uma igualdade devemos ter $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, ou seja, $y = \frac{bx}{a}$.

Como $x^2 + y^2 = 1$, temos $x^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2 = 1$ ou, o que é o mesmo, $(a^2 + b^2)x^2 = a^2$; logo,

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{e} \quad y = \frac{bx}{a} = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Por fim, cálculos diretos mostram que

$$f\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = -\sqrt{a^2 + b^2}$$

e

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Conforme comentamos anteriormente, isso estabelece que os valores mínimo e máximo de f são $-\sqrt{a^2 + b^2}$ e $\sqrt{a^2 + b^2}$, respectivamente. $\square$

A proposição a seguir escreve o resultado do exemplo anterior de uma forma bastante útil em Física.

Proposição 9. A função $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta$$

tem valores mínimo e máximo iguais a $-\sqrt{a^2 + b^2}$ e $\sqrt{a^2 + b^2}$, respectivamente.

Prova. Nas notações do exemplo anterior, se $\phi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{S}$ for dada por $\phi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, então ϕ é sobrejetiva e $g = f \circ \phi$. Portanto, g e f têm imagens iguais, logo, valores extremos também iguais. $\square$

Dicas para o Professor

O material dessa aula deve ser coberto em pelo menos dois encontros de 50 minutos cada.

Usamos a razão $R_f(x, y)$ como modo de, antecipadamente, aproximar a questão da monotonicidade com a verificação

do sinal da derivada, conexão que será completada em aulas futuras.²

Na solução do Exemplo 8 usamos apenas a desigualdade de Cauchy com $n = 2$, caso para o qual apresentamos uma demonstração. Com isso, a solução desse exemplo está auto-contida no texto.

O capítulo 7 da sugestão de leitura complementar [1] exhibe algumas desigualdades fundamentais. Outras aplicações das mesmas à determinação de máximos e mínimos de funções podem ser vistas na sugestão de leitura complementar [2].

O uso de desigualdades para a solução de problemas de máximo e mínimo também é explorado de modo eficaz e elegante na sugestão de leitura complementar [3].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2013.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2013.
3. I. Niven. *Maxima and Minima without Calculus*. The Dolciani Mathematical Expositions, 6, MAA, 1981.

²Confira o teorema 7 da aula *Propriedades - Parte I*, no módulo *Derivada como Função*. Também compare o critério para valores extremos que enunciamos antes da Proposição 7 com o corolário 10 dessa aula.