Material Teórico - Módulo Frações Algébricas

Operações Básicas

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Simplificação de frações algébricas

Uma **fração algébrica** é uma expressão algébrica da forma $\frac{P}{Q}$, em que P e Q são polinômios e Q não é identicamente nulo. Assim como em frações numéricas (números racionais), P é chamado o **numerador** da fração e Q é o seu **denominador**. São exemplos de frações algébricas:

$$\frac{2}{x},\ \frac{4xy - x^2}{5xy^2 - 2x^3y} \text{ e } \frac{1 - abc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Para **simplificar** uma fração algébrica, a regra básica é fatorar o numerador e o denominador e, em seguida, cancelar os termos comuns aos dois. Também como com frações numéricas, quando uma fração algébrica é obtida a partir de outra através de uma simplificação, dizemos que essas duas frações algébricas são **equivalentes**.

Exemplo 1. *Simplifique a fração algébrica*

$$\frac{3ab + 3b^2 + 6bc}{6a^2 + 6ab + 12ac}.$$

Solução. Pondo o fator $3b$ em evidência no numerador e o fator $6a$ em evidência no denominador, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{3ab + 3b^2 + 6bc}{6a^2 + 6ab + 12ac} &= \frac{3b\cancel{(a+b+2c)}}{6a\cancel{(a+b+2c)}}\\ &= \frac{\cancel{3}b}{\cancel{3}\cdot 2a} = \frac{b}{2a}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 2. *Simplifique a fração algébrica*

$$\frac{4x - 12}{x^2 - 9}.$$

Solução. Utilizando a fórmula para a diferença de dois quadrados, temos:

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3).$$

Portanto, colocando o fator 4 em evidência no numerador, obtemos

$$\frac{4x - 12}{x^2 - 9} = \frac{4\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{4}{x+3}.$$

□

Exemplo 3. *Simplifique a fração algébrica*

$$\frac{a^2 + ab - 5a - 5b}{a^2 + 7a + ab + 7b}.$$

Solução. Começamos fatorando o numerador e o denominador por agrupamento, obtendo

$$\begin{aligned}a^2 + ab - 5a - 5b &= (a^2 - 5a) + (ab - 5b)\\ &= a(a-5) + b(a-5)\\ &= (a-5)(a+b)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}a^2 + 7a + ab + 7b &= (a^2 + 7a) + (ab + 7b)\\ &= a(a+7) + b(a+7)\\ &= (a+7)(a+b).\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\frac{a^2 + ab - 5a - 5b}{a^2 + 7a + ab + 7b} = \frac{(a-5)\cancel{(a+b)}}{(a+7)\cancel{(a+b)}} = \frac{a-5}{a+7}.$$

□

Exemplo 4. *Simplifique a fração algébrica*

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

Solução. Novamente, fatoramos o numerador por agrupamento para obter:

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 + x - 1 &= (x^3 - x^2) + (x - 1)\\ &= x^2(x-1) + 1\cdot(x-1)\\ &= (x^2+1)(x-1).\end{aligned}$$

Por outro lado, o denominador é um trinômio quadrado perfeito. De fato, temos $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} &= \frac{(x^2+1)(x-1)}{(x-1)^2}\\ &= \frac{(x^2+1)\cancel{(x-1)}}{(x-1)\cancel{(x-1)}}\\ &= \frac{x^2+1}{x-1}.\end{aligned}$$

□

2 Adição e subtração de expressões algébricas

Antes de definirmos como adicionar duas frações algébricas, recordemos que se duas frações numéricas possuem o mesmo denominador, então a soma dessas duas frações é a fração cujo denominador é o mesmo das duas parcelas e cujo numerador é dado pela soma dos numeradores das parcelas.

Por outro lado, se os denominadores são diferentes, basta encontrarmos duas frações com denominadores iguais, cada uma das quais equivalente a uma das parcelas da soma, e, em seguida, somar essas duas frações (que agora já possuem um mesmo denominador). Normalmente, esse denominador comum é dado pelo *mmc* dos denominadores das duas frações, mas também pode-se tomar, por exemplo, simplesmente o produto dos dois denominadores.

Com frações algébricas procedemos de modo análogo. Se duas frações algébricas são dadas por $\frac{P}{Q}$ e $\frac{P'}{Q}$, definimos sua **soma** pondo

$$\frac{P}{Q}+\frac{P'}{Q}=\frac{P+P'}{Q}.$$

A **diferença** entre $\frac{P}{Q}$ e $\frac{P'}{Q}$ (nessa ordem) é definida de modo semelhante:

$$\frac{P}{Q}-\frac{P'}{Q}=\frac{P-P'}{Q}.$$

Por exemplo, temos:

$$\frac{2}{a}+\frac{b}{a}=\frac{2+b}{a}$$

e

$$\frac{1}{x^2+2x+y}-\frac{x}{x^2+2x+y}=\frac{1-x}{x^2+2x+y}.$$

Se os denominadores das duas frações algébricas em questão são diferentes, primeiro devemos encontrar duas frações algébricas equivalentes às frações algébricas dadas inicialmente e que possuam um mesmo denominador. Em seguida, somamos (ou subtraímos, conforme o caso) essas duas últimas frações algébricas (que agora possuem o mesmo denominador) conforme definimos acima.

Mais precisamente, uma vez que as frações algébricas $\frac{P}{Q}$ e $\frac{P'}{Q'}$ são respectivamente equivalentes às frações algébricas $\frac{PQ'}{QQ'}$ e $\frac{P'Q}{QQ'}$, definimos a **soma** e a **diferença** das frações algébricas $\frac{P}{Q}$ e $\frac{P'}{Q'}$ (nessa ordem, no caso da diferença) pondo

$$\frac{P}{Q}+\frac{P'}{Q'}=\frac{PQ'+P'Q}{P'Q'}$$

e

$$\frac{P}{Q}-\frac{P'}{Q'}=\frac{PQ'-P'Q}{P'Q'}.$$

Chamamos o processo de encontrar essas frações algébricas equivalentes às frações dadas inicialmente de **redução ao mesmo denominador**. Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 5. *Efetue a soma de frações algébricas abaixo:*

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}.$$

Solução. Temos:

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{(x\cancel{-y})+(x\cancel{+y})}{(x+y)(x-y)}=\frac{2x}{x^2-y^2}.$$

Note que na última igualdade utilizamos a fórmula do produto da soma pela diferença, produto notável discutido no modulo de expressões algébricas. □

Para reduzir ao mesmo denominador podemos fazer como acima, multiplicando o numerador e o denominador de cada fração algébrica original pelo denominador da outra. Entretanto, se os denominadores das frações originais tiverem grau alto, esse processo pode dificultar bastante os cálculos.

Nos três exemplos a seguir veremos outro procedimento para reduzir frações algébricas ao mesmo denominador, o qual se assemelha bastante ao processo de redução de frações numéricas a um mesmo denominador, calculando o mmc de seus denominadores. Teremos mais a dizer sobre isso logo após examinarmos tais exemplos.

Exemplo 6. *Efetue a diferença de frações algébricas abaixo:*

$$\frac{a}{a+2}-\frac{1}{a^2+4a+4}.$$

Solução. Observe que a^2+4a+4 é um trinômio quadrado perfeito. De fato, temos:

$$a^2+4a+4=(a+2)^2.$$

Portanto, para reduzir as frações algébricas a um mesmo denominador, multiplicamos o numerador e o denominador da primeira fração por $a+2$, obtendo assim:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+2}-\frac{1}{a^2+4a+4}&=\frac{a(a+2)}{(a+2)^2}-\frac{1}{a^2+4a+4}\\&=\frac{a^2+2a}{a^2+4a+4}-\frac{1}{a^2+4a+4}\\&=\frac{a^2+2a-1}{a^2+4a+4}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 7. *Efetue a soma de frações algébricas abaixo:*

$$\frac{a}{a-b}+\frac{2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a+b}.$$

Solução. Para reduzir as três frações algébricas dadas na adição acima a um mesmo denominador, podemos mais uma vez lançar mão da fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Realmente, se multiplicarmos o numerador e o denominador da fração algébrica $\frac{a}{a-b}$ por $a+b$, e se multiplicamos o numerador e o denominador da fração algébrica $\frac{b}{a+b}$ por

$a-b$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a-b}+\frac{2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a+b} &= \frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)}+\frac{2b}{a^2-b^2}\\ &\quad+\frac{b(a-b)}{(a+b)(a-b)}\\ &= \frac{a^2+ab}{a^2-b^2}+\frac{2b}{a^2-b^2}+\frac{ab-b^2}{a^2-b^2}\\ &= \frac{a^2+ab+2b+ab-b^2}{a^2-b^2}\\ &= \frac{a^2+2ab+2b-b^2}{a^2-b^2}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 8. *Calcule o valor da soma algébrica:*

$$\frac{x+6}{x^2-49}+\frac{1}{2x-14}.$$

Solução. Note que $x^2-49=(x+7)(x-7)$ e $2x-14=2(x-7)$. Daí, para reduzirmos as duas frações ao mesmo denominador, podemos multiplicar os dois termos da primeira fração por 2 e os dois termos da segunda fração por $x+7$. Assim procedendo, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{x+6}{x^2-49}+\frac{1}{2x-14} &= \frac{x+6}{(x-7)(x+7)}+\frac{1}{2(x-7)}\\ &= \frac{2(x+6)}{2(x-7)(x+7)}+\frac{(x+7)\cdot 1}{2(x-7)(x+7)}\\ &= \frac{2x+12}{2(x^2-49)}+\frac{x+7}{2(x^2-49)}\\ &= \frac{2x+12+x+7}{2(x^2-49)}\\ &= \frac{3x+19}{2(x^2-49)}.\end{aligned}$$

□

Em última análise veja que, em cada um dos três últimos exemplos, o que fizemos foi fatorar os denominadores das frações algébricas dadas e, em seguida, ver os fatores comuns e não comuns a tais denominadores, a fim de poder reduzi-los a um denominador comum com um mínimo de esforço computacional. Isso é exatamente o mesmo processo que utilizamos para reduzir frações numéricas a um mesmo denominador, calculando o mmc dos denominadores das frações dadas.

Os próximos dois exemplos mostram como as operações com frações algébricas que estudamos até aqui podem ser úteis para o cálculo de expressões numéricas.

Exemplo 9.

(a) *Mostre que* $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(b) *Utilize o resultado encontrado em (a) para calcular o valor da soma:*

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

Solução. No item (a), observe que podemos reduzir as duas frações algébricas do primeiro membro ao mesmo denominador multiplicando os termos (numerador e denominador) da primeira por $n+1$ e os da segunda por n. Assim fazendo, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} &= \frac{1\cdot(n+1)}{n\cdot(n+1)}-\frac{1\cdot n}{(n+1)\cdot n}\\ &= \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Para o item (b), podemos utilizar o resultado do item (a) várias vezes, para obter a sequência de igualdades abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2\cdot 3}&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3\cdot 4}&=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4\cdot 5}&=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\\ &\vdots\\ \frac{1}{98\cdot 99}&=\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\\ \frac{1}{99\cdot 100}&=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}.\end{aligned}$$

Somando-as membro a membro e fazendo os cancelamentos possíveis, obtemos:

$$\begin{aligned}S&=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots\\ &\quad+\left(\cancel{\frac{1}{98}}-\cancel{\frac{1}{99}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{99}}-\frac{1}{100}\right)\\ &=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 10. *Calcule o valor da expressão numérica*

$$S=\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 15}+\cdots+\frac{1}{54\cdot 57}+\frac{1}{57\cdot 60}.$$

Solução. Observe que

$$9S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{18\cdot 19}+\frac{1}{19\cdot 20}.$$

Portanto, argumentando como no exemplo anterior, temos:

$$\begin{aligned}9S &= \left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)\\ &\quad+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{18}}-\cancel{\frac{1}{19}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{20}\right)\\ &= 1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}.\end{aligned}$$

Daí,

$$S=\frac{1}{9}\cdot\frac{19}{20}=\frac{19}{180}.$$

□

Por fim, vejamos um exemplo no qual operações com expressões algébricas podem ajudar a abordar outras situações problema.

Exemplo 11. *Sejam a e b números naturais não nulos tais que $56a = 65b$. Prove que $a+b$ é um número composto.*

Solução. Observe que:

$$56a = 65b \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{65}{56}.$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{b} &= \frac{a}{b}+\frac{\cancel{b}}{\cancel{b}}=\frac{65}{56}+1\\ &= \frac{65+56}{56}=\frac{121}{56}.\end{aligned}$$

Agora, como $121 = 11^2$ e $56 = 2^3\cdot 7$, concluímos que a fração $\frac{121}{56}$ é irredutível. Mas, como a e b representam números naturais, temos que $\frac{a+b}{b}$ é uma fração equivalente à fração irredutível $\frac{121}{56}$. Desse modo, $a+b$ é um múltiplo de 121 e, assim, é um número composto. □

3 Multiplicação e divisão de frações algébricas

Para **multiplicar** ou **dividir** frações algébricas, também procedemos de modo análogo ao que fazemos com frações numéricas. Mais precisamente, se $\frac{P}{Q}$ e $\frac{P'}{Q'}$ são frações algébricas dadas, definimos o **produto** e o **quociente** de $\frac{P}{Q}$ por $\frac{P'}{Q'}$, respectivamente, por

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{P'}{Q'}=\frac{P\cdot P'}{Q\cdot Q'}$$

e

$$\frac{P}{Q}\div\frac{P'}{Q'}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{Q'}{P'}=\frac{P\cdot Q'}{P'\cdot Q}$$

Por exemplo:

$$\frac{a^2}{b}\cdot\frac{a^3c}{b^2}=\frac{a^2\cdot a^3c}{b\cdot b^2}=\frac{a^5c}{b^3}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{x^2z+1}{y^3}\div\frac{z}{x} &= \frac{x^2z+1}{y^3}\cdot\frac{x}{z}\\ &= \frac{(x^2z+1)\cdot x}{y^3\cdot z}=\frac{x^3z+x}{y^3z}.\end{aligned}$$

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 12. *Efetue as operações com frações algébricas indicadas abaixo, simplificando o resultado quando possível:*

(a) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x+1}{x-y}$.

(b) $\dfrac{8x^4}{y^3}\cdot\dfrac{y^2}{6x^2}$.

Solução.

(a) Utilizando os produtos notáveis que estudamos anteriormente nos termos da primeira fração, temos:

$$\begin{aligned}\frac{x^3-y^3}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x+1}{x-y} &= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+1)^2}\cdot\frac{x+1}{x-y}\\ &= \frac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)\cdot\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{2}}\cancel{(x-y)}}\\ &= \frac{x^2+xy+y^2}{x+1}.\end{aligned}$$

(b) Neste caso, efetuando inicialmente o produto e, em seguida, executando os cancelamentos possíveis, temos:

$$\frac{8x^4}{y^3}\cdot\frac{y^2}{6x^2}=\frac{8x^4y^2}{6x^2y^3}=\frac{4x^2}{3y}.$$

□

Exemplo 13. *Efetue a divisão de frações algébricas abaixo e simplifique o resultado:*

$$\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}\div\frac{a-b}{a+b}.$$

Solução. Fatorando o numerador e o denominador da primeira fração, obtemos:

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

e

$$\begin{aligned}a^4-b^4 &= \left(a^2\right)^2-\left(b^2\right)^2\\ &= \left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)\\ &= \left(a^2+b^2\right)(a+b)(a-b).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4} \div \frac{a-b}{a+b} &= \frac{\cancel{(a-b)}\left(a^2+ab+b^2\right)}{(a^2+b^2)\cancel{(a+b)}\cancel{(a-b)}} \cdot \frac{\cancel{a+b}}{a-b} \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{(a^2+b^2)(a-b)} \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 14. *Efetue a multiplicação abaixo, simplificando o resultado se possível:*

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right).$$

Solução. Inicialmente, efetuamos as duas somas que se encontram dentro dos parênteses:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b} &= \frac{a-b}{(a-b)(a+b)}+\frac{a+b}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{a-b+a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{2a}{a^2-b^2}\end{aligned}$$

e

$$\frac{a^2}{b^2}-1 = \frac{a^2-b^2}{b^2}.$$

Agora, substituindo tais expressões no produto original, obtemos:

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right) = \frac{2a}{\cancel{a^2-b^2}}\cdot\frac{\cancel{a^2-b^2}}{b^2} = \frac{2a}{b^2}.$$

□

Exemplo 15. *Efetue a divisão abaixo, simplificando o resultado se possível:*

$$\frac{4x^2+8x+4}{x^3+y^3} \div \frac{4x^2-4}{x^2-xy+y^2}.$$

Solução. Fatorando cada polinômio que figura como numerador ou denominador das frações algébricas dadas, obtemos:

$$4x^2+8x+4 = 4\left(x^2+2x+1\right) = 4(x+1)^2,$$

$$x^3+y^3 = (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$$

e

$$4x^2-4 = 4\left(x^2-1^2\right) = 4(x+1)(x-1).$$

Substituindo tais formas fatoradas na expressão do enunciado, temos:

$$\begin{aligned}\frac{4x^2+8x+4}{x^3+y^3} \div \frac{4x^2-4}{x^2-xy+y^2} &= \\ &= \frac{4x^2+8x+4}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{4x^2-4} \\ &= \frac{\cancel{4}(x+1)^{\cancel{2}}}{(x+y)\cancel{(x^2-xy+y^2)}}\cdot\frac{\cancel{x^2-xy+y^2}}{\cancel{4}\cancel{(x+1)}(x-1)} \\ &= \frac{x+1}{(x+y)(x-1)} = \frac{x+1}{x^2+xy-x-y}.\end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para discutir cada uma das seções que compõem esse material. O processo de simplificação de frações algébricas dado na seção 1 deve ser exposto depois de uma breve revisão sobre os métodos de fatoração estudados no módulo de expressões algébricas e polinômios. Antes de abordar as operações com frações algébricas discutidas nas seções 2 e 3, é importante que seja feita uma comparação com as mesmas operações com frações numéricas (números racionais).

As referências colecionadas a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios e Equações.* São Paulo, Atual Editora, 2012.