Material Teórico - Módulo Trigonometria I

Mais linhas trigonométricas

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

23 de julho de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Continuamos a discussão sobre o círculo trigonométrico, que é o círculo, no plano cartesiano, de raio 1 e com centro em $O = (0, 0)$. Como antes, considere $A = (1, 0)$ e P um ponto qualquer sobre o círculo trigonométrico. Seja α o ângulo $\angle AOP$, orientado no sentido anti-horário.

Nas aulas anteriores, vimos que os valores do seno e do cosseno de α podem ser obtidos fazendo uso do círculo trigonométrico, já que $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Assim, o eixo-$x$ (horizontal) é chamado de eixo dos cossenos e o eixo-y (vertical) chamado de eixo dos senos. Seja P' o pé da perpendicular traçada de P ao eixo-x (eixo dos cossenos). Isso implica que o comprimento do segmento OP' é igual a $|\cos\alpha|$ e o comprimento de PP' é $|\operatorname{sen}\alpha|$ (ver Figura 1).

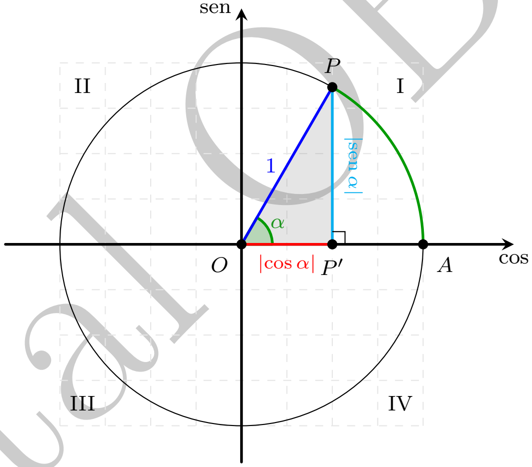

Figura 1: eixo das tangentes.

Vamos, agora, ver como obter geometricamente a tangente de α, usando o círculo trigonométrico.

2 Tangente

Lembre-se de que a tangente de um ângulo α pode ser definida como a razão entre o seno e o cosseno deste ângulo, desde que o cosseno seja diferente de zero. Ou seja,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{desde que } \cos\alpha \neq 0.$$

Também é possível visualizar a tangente usando o círculo trigonométrico.

Para isso, desenhe uma reta perpendicular ao eixo-x passado pelo ponto A (veja que, como essa reta é perpendicular ao raio OA, ela é *tangente* ao círculo trigonométrico). Vamos chamar essa reta de *linha da tangente* (ou eixo da tangente), como na Figura 2.

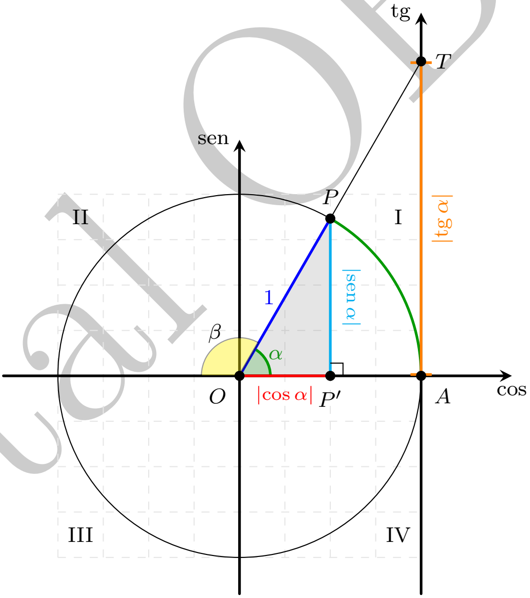

Figura 2: linha das tangentes.

Denotemos por T o ponto de interseção da reta OP com a linha da tangente. Veja que a abcissa do ponto T é igual a 1 (o que vale para qualquer ponto na linha da tangente). Vamos mostrar que a ordenada de T é igual a $\operatorname{tg}\alpha$. Primeiramente, vejamos que o comprimento do segmento $\overline{AT}$ é igual ao valor absoluto de tangente de α, ou seja, $\overline{AC} = |\operatorname{tg}\alpha|$.

Na Figura 2, consideramos o caso em que α está no primeiro quadrante, deixando a você a verificação de que o mesmo vale para os demais quadrantes. Veja que os triângulos AOT e $P'OP$ são semelhantes, pois ambos são triângulos retângulos e possuem o ângulo α em comum. Temos, então, que:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{P'P}}{\overline{P'O}}.$$

Como $\overline{AO} = 1$, $\overline{P'P} = |\operatorname{sen}\alpha|$ e $\overline{P'O} = |\cos\alpha|$, substituindo na igualdade acima, obtemos

$$\overline{AT} = \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{|\cos\alpha|} = \left|\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right| = |\operatorname{tg}\alpha|.$$

Isso garante que o comprimento de $\overline{AT}$ é igual $|\operatorname{tg}\alpha|$, como queríamos.

Sinal da tangente

Considerando que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, temos que $\operatorname{tg}\alpha$ será positiva quando $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ tiverem o mesmo sinal. Isso acontece no quadrante I, quando $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ são ambos positivos, e no quadrante III, quando $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ são ambos negativos.

Por outro lado, temos que $\operatorname{tg}\alpha$ será negativa quando $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ tiverem sinais opostos. Isso acontece no quadrante II, quando $\operatorname{sen}\alpha$ é positivo e $\cos\alpha$ é negativo, e no quadrante IV, quando $\operatorname{sen}\alpha$ é negativo e $\cos\alpha$ é positivo. Isso pode ser resumido na Figura 3.

Voltando ao eixo da tangentes, observe que quando o ponto P está nos quadrantes I ou III, a reta OP intersecta o tal eixo num ponto T que está acima do ponto A; quando o ponto P está nos quadrantes II ou IV, o ponto T está abaixo

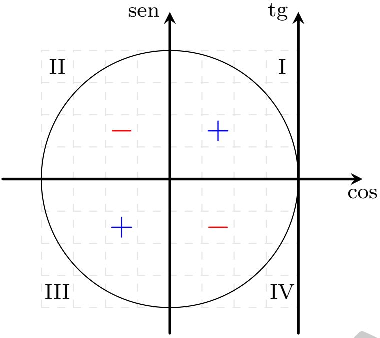

Figura 3: sinal da tangente de um arco em cada quadrante.

do ponto A. Em resumo, quando a tangente é positiva, T está acima de A, logo, possui ordenada positiva; quando a tangente é negativa, T está abaixo de A, logo, possui ordenada negativa.

Por fim, veja que quando $\alpha = \pi/2$ o valor de $\operatorname{tg}\alpha$ não está definido. Tanto porque a reta que passa por (0,0) e (0,1) (este último corresponde a P quando $\alpha = \pi/2$) não intersecta o eixo das tangentes, como porque $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha$ mas $\cos(\pi/2) = 0$ e não podemos realizar uma divisão por zero. De forma geral, sempre que $\cos\alpha = 0$ o valor de $\operatorname{tg}\alpha$ não está definido. Isso acontece precisamente quando $\alpha = \pi/2 + k\pi$, onde k é um número inteiro: quando k é par, temos um arco congruente a $\pi/2$ e, quando k é ímpar, temos um arco congruente a $3\pi/2$.

Gráfico

Com as observações acima, podemos construir o gráfico da função tg (veja a Figura 4). Para cada número real x, consideremos $\alpha = x$ e observamos o que acontece com o ponto correspondente, T, sobre o eixo das tangentes. Dessa vez, vamos começar com x sendo um número negativo um pouco maior que $-\pi/2$ (veja que quando $x = -\pi/2$ o valor de $\operatorname{tg} x$

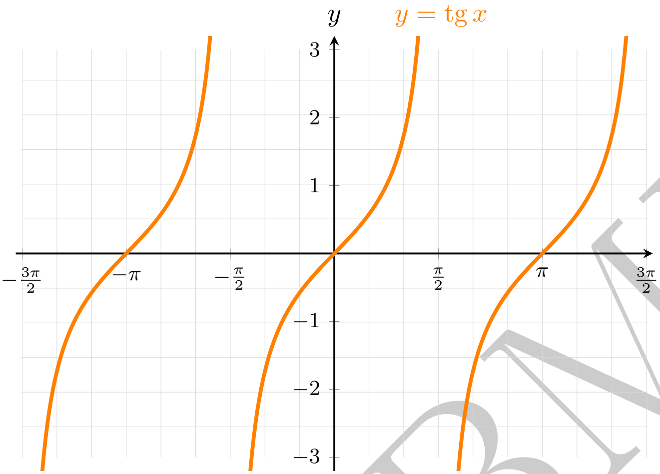

Figura 4: gráficos da tangente no intervalo de $-5\pi/2$ a $5\pi/2$.

não está definido). Nesse caso, o o ponto T estará muito abaixo de A, de forma que $\text{tg}\, x$ será um número de valor muito negativo. À medida que x aumenta de $-\pi/2$ até $\pi/2$ o valor de $\text{tg}\, x$ só aumenta, passado por 0 quando $x = 0$ e crescendo indefinidamente quando x se aproxima de $\pi/2$. Porém, quando $x = \pi/2$ o valor de $\text{tg}\, x$ novamente não está definido. Repentinamente, para x um pouco maior que $\pi/2$, o valor de $\text{tg}\, x$ volta a ser muito negativo e o processo se repete, sempre em intervalor de comprimento π.

Exemplo 1. *Qual o sinal de* $\text{tg}(1197°)$.

Solução. Para calcular o sinal, basta calcular a qual quadrante pertence o arco de 1197 graus. Como uma volta no círculo corresponde a 360° e dividindo 1197 por 360 obtemos

$$1197 = 3 \times 360 + 117,$$

o arco 1197° é congruente a 117°: partindo de A, damos três voltas no círculo trigonométrico e andamos mais 117°, no sentido anti-horário. Como $90 < 117 < 180$, temos que $117°$ está no quadrante II. Logo, $\operatorname{tg}(117°)$ é negativa. $\square$

Exemplo 2. *Calcule uma expressão geral para todos os valores de x que satisfazem* $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Solução. $2\pi/32k\pi$ e $5\pi/3 + 2k\pi$. $\square$

3 Cotangente

Toda a análise que fizemos na seção 2, pode ser facilmente adaptada para entender $\operatorname{ctg}\alpha$ no contexto do círculo trigonométrico. Lembre-se de que

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \text{para } \operatorname{sen}\alpha \neq 0.$$

Seja $B = (1{,}0)$. Trace uma reta *horizontal* passando pelo ponto B (ver Figura 5). Veja que tal reta será tangente ao círculo trigonométrico e paralela ao eixo dos cossenos. Assim, a ordenada de todos os pontos sobre esta reta é igual a 1. Orientando a reta da esquerda para a direita, na mesma direção do eixo dos cossenos, obtemos o chamado eixo das cotangentes, por conta do argumento dos parágrafos a seguir.

Para qualquer ponto P sobre o círculo trigonométrico diferente de (1,0) e $(-1, 0)$, defina R como a interseção da reta OP com o eixo das cotangentes. Vamos mostrar que $R = (\operatorname{ctg}\alpha, 1)$. Já sabemos que R possui ordenada igual a 1. Resta apenas verificar que sua *abcissa* vale $\operatorname{ctg}\alpha$.

Seja P'' a projeção de P sobre o eixo dos senos. De forma semelhante à seção anterior, basta usar a semelhança entre os triângulos OPP'' e ORB. Veja que $\overline{PP''} = |\cos\alpha|$ e $\overline{OP''} = |\operatorname{sen}\alpha|$. Ademais,

$$\frac{\overline{BR}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{P''P}}{\overline{P''O}}.$$

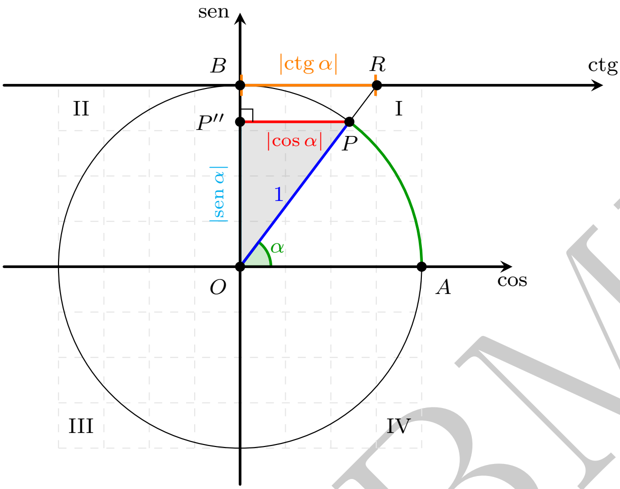

Figura 5: eixo das cotagentes.

Como $\overline{BO} = 1$, disso conclui-se que

$$\overline{BR} = \frac{|\cos\alpha|}{|\operatorname{sen}\alpha|} = \left|\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right|.$$

Por fim, veja que o sinal de $\operatorname{ctg}\alpha$ é o mesmo de $\operatorname{tg}\alpha$, uma vez que $\operatorname{ctg}\alpha = 1/\operatorname{tg}\alpha$, sempre que ambas são não nulas e estão definidas. Também, quando P estiver nos quadrantes I ou III, o ponto R terá abcissa positiva; quando P estiver nos quadrantes II ou IV, o ponto R terá abcissa negativa.

Isso demonstra que a abcissa de R é igual a $\operatorname{ctg}\alpha$.

Por fim, veja que quando $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, o valor de $\operatorname{ctg}\alpha$ não está definido. Isso porque, nesses casos, o ponto P será igual a (1,0) ou $(-1, 0)$, respectivamente, o que implica que a reta OP é o eixo-x, que é paralelo ao eixo das cotangentes; dessa forma, o ponto R não está definido. De forma alternativa, veja que nesses casos temos $\operatorname{sen}\alpha = 0$, logo, a razão $\operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha/\operatorname{sen}\alpha$ não está definida. Isso também acontece quando α é qualquer arco congruente a 0 ou π radianos, e somente nesses casos. Assim, $\operatorname{ctg}\alpha$ não está definida precisamente quando $\alpha = k\pi$, para algum número inteiro k: quando k é par temos um arco congruente a 0 e quando k é ímpar temos um arco congruente a π.

4 Secante e cossecante

A secante a a cossecante de um arco também podem ser obtidas através do círculo trigonométrico. O resultado é um pouco diferente, já que não há linhas (eixos) trigonométricos para a secante nem para a cossecante. Mas a forma de se argumentar é análoga ao que fizemos nas seções anteriores, via semelhança de triângulos. Primeiro, vamos lembrar das definições dessas funções. A secante de α é definida como

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{para } \cos\alpha \neq 0$$

e a cossecante é definida como

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \text{para } \operatorname{sen}\alpha \neq 0$$

Como sempre, seja P um ponto sobre o círculo trigonométrico tal que o arco AP mede α. Dessa vez, vamos traçar uma reta tangente ao círculo passando por P. Veja a Figura 6. Seja W a interseção dessa reta com o eixo dos senos e V a interseção com o eixo dos cossenos. Afirmamos que $W = (0, \csc\alpha)$ e $V = (\sec\alpha, 0)$. Ou seja, a ordenada de W é a cossecante de α enquanto a abcissa de V é a secante de α. Abaixo, consideramos o caso em que P está no primeiro quadrando, deixando a análise dos demais casos para o leitor.

Veja que $\overline{OP} = 1$. Assim, o fato de que os triângulos OPP' e OVP são semelhantes nos dá:

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\overline{OV}} \implies \overline{OV} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

Por outro lado, o fato de que os triângulos OPP' e WOP

são semelhantes nos dá:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1} = \frac{1}{\overline{OW}} \implies \overline{OW} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \csc\alpha.$$

Mas lembre-se de que a secante *não está* definida nos arcos em que o cosseno é igual ao zero, ou seja, nos mesmos arcos em que a tangente não está definida, isto é, nos arcos da forma $\pi/2 + k\pi$, para algum k inteiro. A interpretação geométrica disso é que para tais arcos o ponto V não está definido, já que a reta tangente ao círculo trigonométrico que passa por P será paralela ao eixo dos cossenos.

Da mesma forma, a cossecante não está definida no arcos em que o seno é zero, ou seja, em que a cossecante não está definida, isto é, nos arcos da forma $k\pi$ para algum k inteiro. Em tais arcos, o ponto W não está definido.

É claro que o sinal de $\sec\alpha$ é o mesmo que o de $\cos\alpha$. Analogamente, o sinal de $\csc\alpha$ é o mesmo que o de $\operatorname{sen}\alpha$. Sendo que enquanto $|\cos\alpha| \leq 1$ e $|\operatorname{sen}\alpha| \leq 1$ para todo α, temos que $|\sec\alpha| \geq 1$ e $|\csc\alpha| \geq 1$ para todo α.

4.1 Consequências da relação fundamental

Em aulas anteriores, estudamos a relação fundamental da Trigonometria, que nos diz que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{1}$$

para qualquer arco α.

Aqui, apenas chamamos atenção para o fato de que tal relação nos dá, de imediato, uma relação entre as funções tg e sec, quando $\cos\alpha \neq 0$ (ou seja, quando tais funções estão definidas): basta dividir ambos os lados da equação (1) por $\cos^2\alpha$, para obter:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

o que pode ser simplificado para

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha.$$

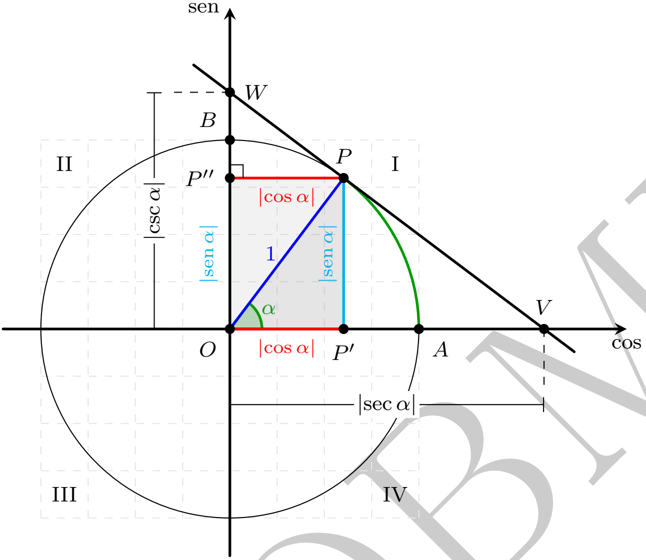

Figura 6: representação da secante e da cossecante.

Analogamente, temos uma relação entre $\operatorname{ctg}\alpha$ e $\csc\alpha$, quando $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$: basta dividir ambos os lados da equação (1) por $\operatorname{sen}^2\alpha$, para obter:

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha.$$

As equações acima são de importância fundamental no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, no Ensino Superior, já que ajudam na resolução de algumas integrais importantes. Isso foge do escopo desse texto, mas remetemos o leitor interessado a [2]. Assim, nos ateremos à análise de um exemplo mais simples.

Exemplo 3. *Sabendo que* $\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2$, *calcule o valor de* $\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

Solução. Esse problema seria bastante difícil de resolver sem fazer uso da relação

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha.$$

Mas de posse dela, podemos resolvê-lo de várias maneiras. Por exemplo, veja que a relação acima equivale a:

$$\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1.$$

Fatorando o lado esquerdo, obtemos:

$$(\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha)(\sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha) = 1.$$

Usando que $\sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2$, é imediato concluir que

$$\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Chamamos atenção para os vídeos das aulas "Aula 16 - Linhas Trigonométricas - Tangente II" e "Aula 19 - Linhas Trigonométricas – Secante e Cossecante I", que trazem animações usando o software Geogebra, exibindo o comportamento dos pontos T, W e V à medida que variamos o ponto P. Também, dê uma olhada no "Caderno de Exercícios" (procure o botão com esse nome no dentro da seção " Mais Linhas Trigonométricas" do atual módulo no Portal), que conta com a solução de vários dos exercícios propostos. Em especial, ele traz problemas sobre aplicações da relação fundamental, que não incluímos aqui para evitar redundância. Sugerimos que o conteúdo desta aula seja abordado em dois encontros de 50 minutos, e que se aborde também exercícios contidos no caderno.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [3] traz um curso completo de Trigonometria, no âmbito do Ensino Médio. Por fim, a referência [2] traz várias aplicações da Trigonometria em nível de Ensino Superior.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, segunda edição. SBM, Rio de Janeiro, 2022.

3. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.