Material Teórico - Módulo Matrizes e Sistemas Lineares

Sistemas Lineares - Parte 2

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 A representação matricial

Na segunda parte desta aula, usaremos a representação matricial de um sistema linear para simplificar o emprego do método do escalonamento (ou eliminação gaussiana), que foi estudado na primeira parte. A representação matricial é bastante útil em diversos outros contextos, mas aqui ela terá o simples intuito de tornar a notação mais compacta.

Considere o sistema linear abaixo, com m equações nas n variáveis $x_1, \ldots, x_n$, escrito em sua forma padrão. Nela as variáveis aparecem na mesma ordem em todas as equações, sempre do lado esquerdo, cada coluna contém uma única variável e o termo independente aparece do lado direito das equações.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \tag{1}$$

Tendo escrito o sistema neste formato, podemos montar uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de dimensões $m \times n$, onde a_{ij} é justamente o coeficiente da variável x_j na i-ésima equação, para todos i e j com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Assim, para montar a matriz $\mathbf{A}$, basta essencialmente olhar para o lado esquerdo das equações e omitir as variáveis.

Dessa forma,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Vamos, ainda, montar outras duas matrizes. A primeira é a matriz $\mathbf{X}$, de dimensões $n \times 1$, tal que colocamos a variável x_j na linha j, para $1 \leq j \leq n$; a segunda é a matriz $\mathbf{B}$, de dimensões $m \times 1$, tal que colocamos o número b_i na linha i, para $1 \leq i \leq m$. Portanto,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Lembrando como é definido o produto de matrizes, veja que o sistema (1) é equivalente ao produto $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Define-se também a *matriz aumentada* do sistema (1) como a matriz $\mathbf{M}$, de dimensões m por $n+1$, obtida concatenando-se as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (na representação abaixo, a linha vertical não tem função alguma, além de destacar a última coluna, para lembrar-lhe de que ela é composta pelos segundos membros das equações de (1)):

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

O interessante aqui é que todos os dados necessários para a resolução do sistema (1) estão presentes de forma compacta na matriz $\mathbf{M}$.

Exemplo 1. *O sistema linear*

$$\begin{cases} 2x - 2y + 5z = 0 \\ 7x + 4y + 15z = 5 \\ x - 8y + 30z = 2 \end{cases}$$

pode ser representado na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & 15 \\ 1 & -8 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sua matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 15 & 5 \\ 1 & -8 & 30 & 2 \end{array}\right].$$

Exemplo 2. *Escreva o sistema linear a seguir em forma padrão e determine sua matriz aumentada:*

$$\begin{cases} 2x + z - 8 = 0 \\ 7x - 15z = 5 \\ -8y = 2 - 30z \end{cases} .$$

Solução. Na forma padrão, devemos ter uma coluna para cada variável, assim como ter somente o termo independente no lado direito de cada equação. Executando as operações necessárias para chegar a tal configuração, obtemos

$$\begin{cases} 2x \qquad\quad + \;\; z = 8 \\ 7x \qquad\quad - 15z = 5 \\ \qquad - 8y + 30z = 2 \end{cases} .$$

Dessa forma, a matriz aumentada do sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 8 \\ 7 & 0 & -15 & 5 \\ 0 & -8 & 30 & 2 \end{array}\right].$$

□

1.1 Operações elementares com linhas

A fim de resolver um sistema usando o método do escalonamento, vamos aplicar as mesmas operações definidas na aula anterior, mas diretamente à matriz aumentada do sistema. No contexto de matrizes, tais operações são traduzidas ao formato abaixo, com i e j representando inteiros de 1 até m (onde m é o número de equações do sistema):

Tipo 1. Operação $L_j \leftrightarrow L_i$: trocar a linha i pela linha j e vice-versa.

Tipo 2. Operação $L_j \leftarrow L_j + kL_i$: somar à linha j o resultado de k multiplicado pela linha i (onde k é um número real qualquer).

Tipo 3. Operação $L_j \leftarrow kL_j$, para $k \neq 0$: multiplicar todos os elementos da linha j por uma constante k não nula.

Observe que demos nomes para cada operação, o que torna mais fácil indicar qual operação está sendo usada durante a resolução dos problemas.

1.2 A forma escalonada de uma matriz

Ao aplicar as operações acima, o objetivo é transformar a matriz aumentada em uma matriz em *forma escalonada*, pois isso facilitará a solução do sistema.

Para tanto, começamos observando que uma linha da matriz é chamada de *nula* quando todos os seus elementos são nulos. Por outro lado, para cada linha não nula, o elemento não nulo mais à esquerda na linha é chamado de *pivô* ou *coeficiente líder* da mesma. Por fim, uma matriz em forma escalonada deve satisfazer as seguintes condições:

- Todas as linhas não nulas devem estar acima de todas as linhas nulas.
- O pivô de qualquer linha não nula, a partir da segunda, deve estar em uma coluna *estritamente* à direta da coluna do pivô da linha acima.

Observação 3. *Chamamos a atenção do leitor para o fato de que, adicionalmente às duas condições acima, alguns textos pedem que, em uma matriz em forma escalonada, o pivô de cada linha não nula seja igual a* 1*. Isso facilita um pouco a resolução do sistema linear correspondente, mas não é estritamente necessário e, por simplicidade, não será exigido aqui.*

Exemplo 4. *A matriz* 3×5 *abaixo encontra-se na forma escalonada, quaisquer que sejam os números reais* $a_0, a_1, \ldots, a_6$*. Os pivôs das linhas estão destacados em vermelho.*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & a_6 \end{bmatrix}.$$

Voltando às operações de tipos 1, 2 e 3, não é difícil ver que podemos utilizá-las para transformar uma matriz dada em outra, em forma escalonada. Realmente, enquanto existirem dois pivôs de linhas não nulas diferentes em uma mesma coluna, é possível usar uma operação do tipo 2 para transformar um deles em zero e fazer com que o novo pivô da linha alterada fique à direita do atual (a execução de um tal passo ficará mais clara na resolução dos exemplos a seguir). Então, repetindo essa operação tanto quanto possível, transformamos a matriz dada em outra, tal que os pivôs de duas linhas não nulas quaisquer estejam situados em colunas duas a duas distintas. Por fim, uma vez feito isso, usando a operação de trocar linhas (tipo 1), podemos reordenar as linhas de modo que toda linha não nula tenha seu pivô à direita de todos os pivôs das linhas acima dela.

Quando transformamos uma matriz dada $\mathbf{A}$ em uma matriz em forma escalonada $\mathbf{E}$, é usual dizer que $\mathbf{E}$ é a *forma escalonada* da matriz $\mathbf{A}$. Observamos, contudo, que a forma escalonada de uma matriz não é única. Mais precisamente, dependendo de quais operações sejam executadas é possível obter diferentes formas escalonadas para uma mesma matriz. Contudo, sendo $\mathbf{A}$ a matriz aumentada de um sistema linear, qualquer forma escalonada de $\mathbf{A}$ nos dará as mesmas soluções para o sistema original, uma vez que cada operação de tipo 1, 2 ou 3 sempre produz um sistema equivalente ao anterior.

Os exemplos a seguir ilustram, na prática, como resolver sistemas lineares colocando suas matrizes aumentadas em forma escalonada.

Exemplo 5. *Uma pessoa dispõe de* 17 *moedas, sendo algumas de um real, outras de cinquenta centavos e outras de dez centavos. Ela percebe que, gastando todas as moedas de um real, fica com* R$ 1,50*. Percebe, por outro lado, que se gastar todas de dez centavos, fica com* R$ 11,00*. De quantas moedas de cada tipo a pessoa dispõe?*

Solução. Sejam x, y e z as quantidades de moedas de um real, cinquenta centavos e dez centavos, respectivamente. O enunciado do problema nos diz que:

$$\begin{cases} x + y + z = 17 \\ 0{,}50y + 0{,}10z = 1{,}50 \\ x + 0{,}50y = 11 \end{cases}.$$

Esse sistema possui a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 17 \\ 0 & \mathbf{0{,}50} & 0{,}10 & 1{,}50 \\ \mathbf{1} & 0{,}50 & 0 & 11 \end{array}\right].$$

Seguindo com o processo de escalonamento, veja que a coluna 1 possui dois pivôs. Vamos *zerar* o pivô da linha 3 realizando a operação $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ (para facilitar a visualização, indicamos ao lado da linha modificada qual a operação que está sendo realizada):

$$\begin{array}{r}\\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1)\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 17 \\ 0 & \mathbf{0{,}50} & 0{,}10 & 1{,}50 \\ 0 & \mathbf{-0{,}50} & -1 & -6 \end{array}\right].$$

Agora, a coluna 2 possui dois pivôs. Vamos usar a operação $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ para *zerar* o pivô atual da linha 3:

$$\begin{array}{r}\\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1)\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 17 \\ 0 & \mathbf{0{,}50} & 0{,}10 & 1{,}50 \\ 0 & 0 & \mathbf{-0{,}90} & -4.50 \end{array}\right].$$

Agora, a matriz encontra-se em forma escalonada e, para resolver o sistema, basta utilizar a forma escalonada como sua nova matriz aumentada. Nesse sentido, a linha 3 corresponde à equação $-0{,}9z = -4{,}5$, de sorte que $z = 5$. Por outro lado, a linha 2 corresponde à equação $0{,}5y + 0{,}1z = 1{,}50$; substituindo o valor de z, obtemos

$$0{,}5y + 0{,}5 = 1{,}5 \implies 0{,}5y = 1 \implies y = 2.$$

Por fim, da linha 1 temos $x + y + z = 17$, o que implica $x = 17 - 2 - 5 = 10$.

Sendo assim, o sistema é possível determinado, e a pessoa possui dez moedas de um real, duas moedas de cinquenta centavos e cinco moedas de dez centavos. □

Exemplo 6. *Resolva o sistema a seguir usando o método do escalonamento.*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}.$$

Solução. O sistema já encontra-se em na forma padrão e sua matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 1 & -1 & 8 \\ \mathbf{-3} & -1 & 2 & -11 \\ \mathbf{-2} & 1 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

A fim de que a primeira coluna fique com apenas um pivô, vamos realizar duas operações: $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. Estas duas operações são executadas de forma independente uma da outra, mas escrevemos aqui o resultado de ambas de uma só vez:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \mathbf{1/2} & 1/2 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Agora, a coluna 2 possui dois pivôs. A fim de eliminar um deles, vamos fazer $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$. O resultado disto é a matriz em forma escalonada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \mathbf{1/2} & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 1 \end{array}\right].$$

Como no exemplo anterior, utilizando-a como matriz aumentada, obtemos o sistema linear abaixo, o qual é equivalente ao original:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ \quad -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1 \\ \qquad\quad - z = 1 \end{cases}.$$

De imediato, temos $z = -1$. Então, substituindo este valor na segunda equação, segue que $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(-1) = 1$, o que implica $y = 3$. Por sua vez, substituindo os valores de y e z na primeira equação, obtemos $2x + 3 - (-1) = 8$, o que nos dá $x = 2$. Dessa forma, a única solução do sistema é $(x, y, z) = (2, 3, -1)$ e o sistema é possível determinado. □

Exemplo 7. *Resolva o sistema:*

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 2 \\ 2x - y - z = 4 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}.$$

Solução. Veja que o sistema já se encontra na forma padrão. Sua matriz aumentada (com pivôs destacados) é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ \mathbf{2} & -1 & -1 & 4 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Dando início ao escalonamento, desejamos zerar as entradas da primeira coluna, exceto pela entrada dela situada na primeira linha. Para isso, vamos realizar as operações $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, observando que elas são executadas de forma independente uma da outra. Isso gera a matriz:

$$\begin{array}{r}\\ (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_2)\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{-7} & -7 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Para simplificar um pouco a matriz vamos multiplicar a linha 2 por $-1/7$ (operação $L_2 \leftarrow (-1/7)L_2$) e a linha 3 por $1/2$ (operação $L_3 \leftarrow (1/2)L_3$), obtendo:

$$\begin{array}{r}\\ (L_2 \leftarrow (-1/7)L_2) \\ (L_3 \leftarrow (1/2)L_3)\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Por fim, basta subtrair a linha 2 da linha 3 para obter um matriz escalonada:

$$\begin{array}{r}\\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_2)\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Resta interpretar o resultado. A linha 3 corresponde à equação $0x + 0y + 0z = 0$, que é válida para quaisquer valores de x, y e z; logo, pode ser ignorada. A linha 2 nos diz apenas que $y + z = 0$, logo, $y = -z$. Por fim, a linha 1 nos diz que $x + 3y + 3z = 2$; substituindo y por $-z$, segue que $x = 2$.

Sendo assim, as soluções do sistema são as triplas ordenadas da forma $(2, -z, z)$, onde z é qualquer número real. O sistema é classificado como possível indeterminado. $\square$

Solução alternativa. Para este sistema, existe uma solução alternativa mais rápida usando o método da adição: somando a segunda e a terceira equações, conseguimos eliminar simultaneamente as variáveis y e z, ficando com $4x = 8$, o que implica $x = 2$.

Agora, substituindo o valor de x em todas as equações, obtemos:

$$\begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

Veja que todas as equações do último sistema acima se reduzem a $y + z = 0$. Sendo assim, o sistema é possível indeterminado e possui solução geral $(2, -z, z)$. $\square$

Um sistema linear em que todos os termos independentes são iguais a zero é chamado de *sistema homogêneo*. Observe que um sistema homogêneo nunca é impossível, pois ele sempre admite pelo menos uma solução: aquela em que todas as variáveis são iguais a zero. Esta solução é chamada de *solução trivial*. Sendo assim, há apenas duas possibilidades para um sistema homogêneo: ou ele é possível determinado (e a única solução será a trivial), ou ele é possível indeterminado. No segundo caso, vimos na aula anterior que o sistema terá infinitas soluções.

Exemplo 8. *Sabendo que o sistema abaixo, nas variáveis x, y e z, possui uma solução não trivial, encontre os possíveis valores de m.*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y + mz = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}.$$

Solução. Veja que este é um sistema linear homogêneo, de forma que $(0, 0, 0)$ é sempre solução (a trivial). Assim, o sistema tem um outra solução se e só se for indeterminado.

Para concluir que um sistema homogêneo é indeterminado, é fácil ver que sua matriz escalonada deverá ter pelo menos uma linha (toda) nula, mas sem que exista uma linha onde apenas o termo independente seja não nulo.

Vamos, então, proceder com o escalonamento de sua matriz aumentada, como nos exemplos anteriores. Ela é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & -1 & m & 0 \\ \mathbf{2} & 3 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Começamos zerando os pivôs atuais das linhas 2 e 3:

$$\begin{array}{r} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-3} & m-1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -3 & 0 \end{array}\right].$$

Agora, observamos que a coluna 2 possui dois pivôs (os números -3 e -1). É mais prático zerar o pivô -3 da segunda linha, fazendo a operação $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ (pois dessa forma não precisamos lidar com frações – a outra opção seria fazer $L_3 \leftarrow L_3 - (1/3)L_2$). Assim, ficamos com

$$\begin{array}{r} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m+8} & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -3 & 0 \end{array}\right].$$

Para obter a forma escalonada, basta agora trocar de posição as linhas 2 e 3 ($L_2 \leftrightarrow L_3$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m+8} & 0 \end{array}\right].$$

Então, para que o sistema seja indeterminado, a única opção é tomar $m + 8 = 0$, de modo que $m = -8$. $\square$

Exemplo 9. *Resolva o seguinte sistema linear abaixo utilizando o método do escalonamento:*

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + w = 5 \\ 3x - y + 4z + 2w = 7 \\ 5x + 3y + 8z + 4w = 17 \\ 4x + y + 6z + 3w = 13 \end{cases}.$$

Solução. Veja que a matriz aumentada do sistema é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 8 & 4 & 17 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 13 \end{array}\right].$$

Para escaloná-la, vamos começar realizando as operações $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$ (estas três operações são executadas de forma independente). O objetivo é zerar todas as entradas da coluna 1, com exceção da primeira, e o resultado das operações é:

$$\begin{array}{r} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \\ (L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-7} & -2 & -1 & -8 \\ 0 & \mathbf{-7} & -2 & -1 & -8 \\ 0 & \mathbf{-7} & -2 & -1 & -7 \end{array}\right].$$

Continuando, a fim de zerar os (novos) pivôs das linhas 3 e 4, executamos as operações descritas abaixo:

$$\begin{array}{r} \\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \\ (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-7} & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right].$$

Finalmente, fazendo $L_3 \leftrightarrow L_4$, obtemos a matriz escalonada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-7} & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A existência de uma linha em que o único termo não nulo está na última coluna (e, portanto, corresponde a um termo independente do sistema equivalente), nos garante que o sistema é impossível. Mais precisamente, veja que a linha 3 do sistema agora equivale à equação

$$0x + y + 0z + 0w = 1.$$

Isso é impossível, pois não existem valores para x, y, z e w que tornem tal equação verdadeira. Sendo assim, o sistema original também é impossível. $\square$

Finalizamos apresentando um exemplo que mostra que nem sempre uma aplicação direta do método do escalonamento é útil.

Exemplo 10. *Considere o sistema abaixo, sobre as variáveis x e y:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right. . \qquad (2)$$

Sabe-se que pelo menos um dos coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2 é não nulo e que os pares ordenados $(3,-5)$ e $(2,-3)$ são soluções do sistema. Podemos concluir que:

(a) $(-3,7)$ também é solução.

(b) $(3,-7)$ também é solução.

(c) apenas os dois pares apresentados são soluções.

(d) o sistema tem apenas mais uma solução, além das apresentadas.

(e) qualquer par ordenado de números reais é solução do sistema.

Solução. Como é dado que o sistema possui duas soluções distintas, ele não é impossível e nem é determinado. Sendo assim, só resta a possibilidade do sistema ser possível indeterminado. Neste caso, sabemos que o sistema possui infinitas soluções, e já podemos concluir que os itens (c) e (d) são falsos. Além disso, como pelo menos um dos coeficientes é não nulo, podemos também concluir que o item (e) é falso.

Resta apenas decidir se o item correto é (a) ou (b). Para tanto, usando que $(3,-5)$ e $(2,-3)$ são soluções, vimos na Parte 1 deste material que, para qualquer real t, fazendo

$$(x,y) = \big(3t + 2(1-t), -5t + (-3)(1-t)\big)$$

obtemos uma nova solução. Dessa forma, para todo real t, fazendo

$$(x,y) = (2+t, -3-2t)$$

obtemos uma solução do sistema. Em particular, quando $t=-5$ obtemos que $(x,y) = (-3,7)$ é uma solução. Logo, o item (a) está correto.

Por último, veja que o item (b) não pode ser verdadeiro. Se fosse, teríamos duas soluções distintas, $(3,-5)$ e $(3,-7)$, que possuem um mesmo valor para x mas possuem diferentes valores para y. Vamos provar que isso implica que os coeficientes de y teriam que ser nulos, ou seja, $b_1 = b_2 = 0$. De fato, substituindo-se (x,y) por $(3,-5)$ e por $(3,-7)$ na primeira equação do sistema (2), temos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3a_1 & - & 5b_1 & = & c_1 \\ 3a_1 & - & 7b_1 & = & c_1 \end{array}\right. .$$

Subtraindo a segunda equação acima da primeira, obtemos que $2b_1 = 0$, e assim $b_1 = 0$. O fato de que $b_2 = 0$ pode ser obtido de modo análogo, olhando para a segunda equação do sistema (2). Agora, tendo $b_1 = b_2 = 0$ e assumindo, sem perda da generalidade, que a_1 é não nulo, concluímos que só poderia haver um valor possível para x, a saber, $x = c_1/a_1$. Mas, sendo esse o caso, o par $(2,-3)$ não poderia ser solução, o que é uma contradição. Concluímos, pois, que o item (b) é falso. $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que este material seja apresentado em dois encontros de 50 minutos, com a resolução de exercícios das listas encontradas no portal.

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$, $n \times n$, é chamada de *invertível* quando existe uma matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Um dos pontos importantes da representação matricial de sistemas é que, no caso em que $\mathbf{A}$ é invertível, ao escrevermos o sistema na forma $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$, para encontrar a solução $\mathbf{X}$ basta multiplicar ambos os lados desta equação matricial pela inversa de $\mathbf{A}$, obtendo $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B}$. Sendo assim, qualquer forma eficiente de encontrar $\mathbf{A}^{-1}$ (ou de mostrar que $\mathbf{A}$ não é invertível), nos dá uma maneira de resolver o sistema (ou de mostrar que o sistema é impossível ou indeterminado). O método do escalonamento que estudamos aqui pode ser ligeiramente modificado para encontrar a inversa de uma matriz (ou mostrar que a matriz não é invertível). Para uma exposição elementar, veja uma das referências abaixo, por exemplo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. T. Apostol. *Cálculo, Volume II.* Reverté, Lisboa, 1993.

2. S. Leon. *Álgebra Linear com Aplicações.* LTC, Rio de Janeiro, 2011.