Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana Parte 1

Triângulos

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Intrudução

Dados três pontos não colineares A, B e C no plano, o **triângulo** ABC é a união dos três segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ (veja a Figura 1). Os pontos A, B e C são os **vértices**, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são os **lados** e os ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$ são os **ângulos internos** do triângulo ABC. Quando não houver perigo de confusão, as medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC serão denotadas simplesmente por $B\widehat{A}C = \widehat{A}$, $A\widehat{B}C = \widehat{B}$ e $A\widehat{C}B = \widehat{C}$.

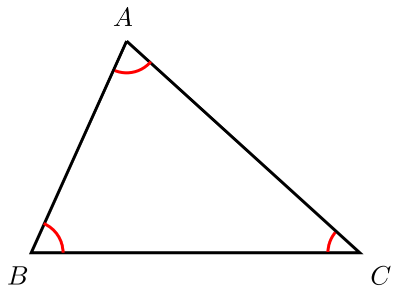

Figura 1: um triângulo ABC qualquer.

Agora, conforme mostrado na Figura 2, tomemos pontos D, E e F, respectivamante, sobre as semirretas $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Os ângulos $\angle DAC$, $\angle ABE$ e $\angle BCF$ são três dos **ângulos externos** do triângulo ABC. Observe que, além dos ângulos externos mostrados na Figura 2, o triângulo ABC tem outros três angulos externos, os quais são OPV aos ângulos externos mostrados na figura. (Sugerimos ao leitor, nesse momento, parar por um instante e, à guisa de exercício, marcar esses três outros ângulos externos.)

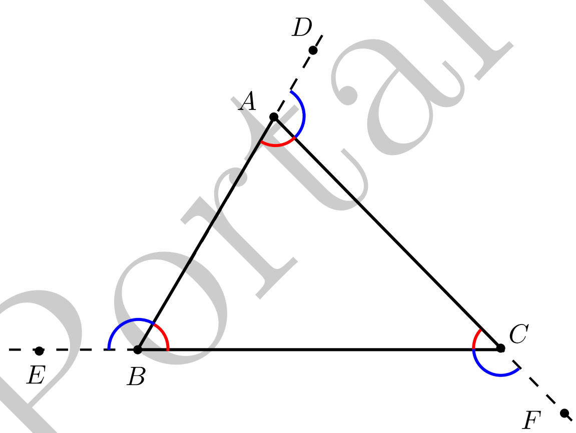

Figura 2: ângulos de um triângulo qualquer.

Definimos, ainda, o **interior** de um triângulo ABC como o interior da região convexa do plano delimitada pelos seus lados. Dessa forma, o **exterior** de ABC é definido como o complementar da reunião entre o seu interior e o próprio triângulo ABC. (Veja a Figura 3.)

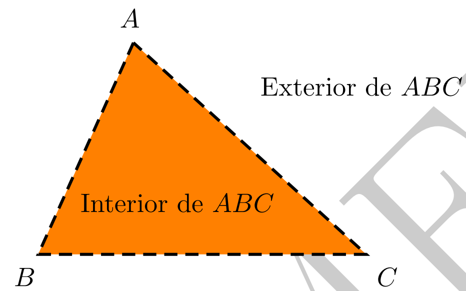

Figura 3: interior e exterior de um triângulo.

2 Classificação quanto aos lados

Os triângulos podem ser classificados em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos internos. Quanto aos lados, temos a seguinte classificação:

> Um triângulo ABC é **equilátero** se
> $$AB = AC = BC.$$

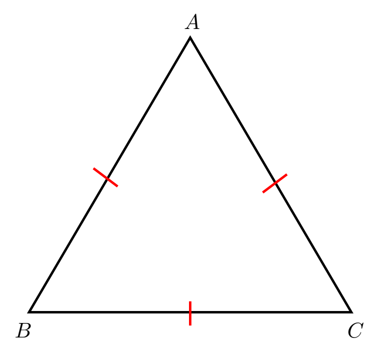

Figura 4: um triângulo equilátero ABC.

> Um triângulo ABC é **isósceles** se
> $$AB = AC \text{ ou } AB = BC \text{ ou } AC = BC.$$

> Um triângulo ABC é **escaleno** se
> $$AB \neq BC, \ \ AC \neq BC \text{ e } AB \neq AC.$$

Observe que a definição de triângulo isósceles não exclui a possibilidade de que os três lados do triângulo sejam

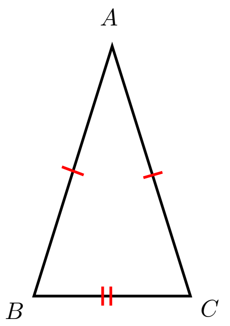

Figura 5: um triângulo isósceles ABC.

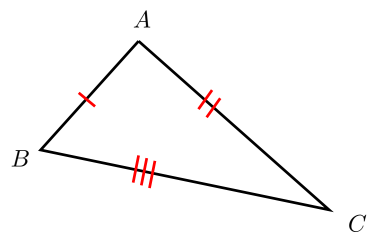

Figura 6: um triângulo escaleno ABC.

iguais. De outra forma, quando escrevemos "$AB = AC$ ou $AB = BC$ ou $AC = BC$", não estamos dizendo nada, em cada caso, sobre o comprimento do terceiro lado (que pode, ou não, ser igual ao comprimento dos outros dois lados). Assim, para triângulos isósceles, pede-se que *pelo menos* dois lados tenham comprimentos iguais, de forma que

Todo triângulo equilátero é isósceles.

Por outro lado, no caso de triângulos escalenos, pede-se que os três lados do triângulo tenham comprimentos dois a dois distintos.

3 A soma dos ângulos de um triângulo

Dado um triângulo ABC cujos ângulos internos medem $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, considere um ponto D sobre o prolongamento do lado $\overline{AB}$, conforme mostrado na Figura 7.

Tracemos por A uma reta r, paralela ao lado $\overline{BC}$, e marquemos um ponto E sobre r, também conforme mostrado na Figura 7. Veja que as retas r e $\overleftrightarrow{AB}$ são paralelas, os ângulos $\angle DAE$ e $\angle ABC$ são correspondentes, e os ângulos $\angle EAC$ e $\angle ACB$ são alternos internos. Daí, temos

$$D\widehat{A}C = D\widehat{A}E + E\widehat{A}C = A\widehat{B}C + A\widehat{C}B = \widehat{B} + \widehat{C}.$$

Podemos sintetizar a discussão feita acima no seguinte resultado:

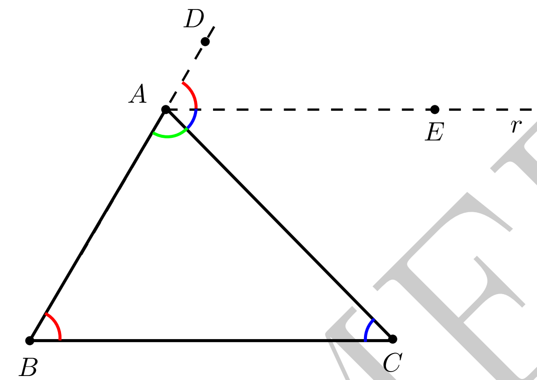

Figura 7: relação entre ângulos internos e externos.

Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo qualquer é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Uma consequência imediata, mas importantíssima, é o fato de que (nas notações da Figura 7)

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A} + D\widehat{A}C = 180°.$$

Assim, temos a seguinte propriedade dos ângulos internos de um triângulo:

Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é sempre igual a 180°.

Nos valeremos do fato acima para classificar os triângulos em relação às medidas de seus ângulos internos.

Mais precisamente, se $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ denotam as medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC, então no máximo um dentre $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ pode ser maior ou igual a 90°. De fato, se fossem $\widehat{A} \geq 90°$ e $\widehat{B} \geq 90°$, por exemplo, teríamos

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{A} + \widehat{B} \geq 90° + 90° = 180°,$$

contradizendo a propriedade destacada acima.

Graças à discussão acima, a classificação dos triângulos quanto às medidas de seus ângulos internos contempla somente os seguintes casos:

Um triângulo é **acutângulo** se seus três ângulos internos são agudos, ou seja, se seus três ângulos internos medem menos que 90º.

Um triângulo é **obtusângulo** se possui um ângulo obtuso, isto é, se um de seus ângulos internos tem medida maior do que 90º.

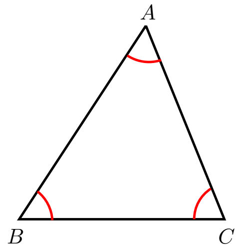

Figura 8: um triângulo acutângulo ABC.

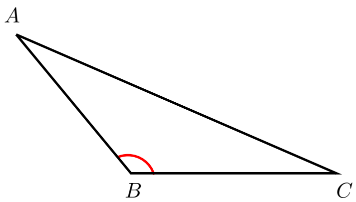

Figura 9: um triângulo obtusângulo ABC.

Um triângulo é **retângulo** se possui um ângulo interno reto, ou seja, se possui um ângulo interno cuja medida é igual a 90º.

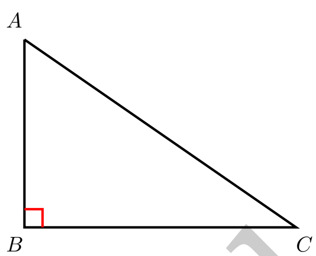

Figura 10: um triângulo retângulo ABC.

4 O teorema do ângulo externo

O teorema que diz que a soma dos ângulos de todo triângulo é igual a $180°$ possui uma elaboração bastante importante, conhecida como o **teorema do ângulo externo** e que é o objeto dessa seção. Em palavras, esse resultado diz o seguinte:

Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Para ver porque esse resultado é verdadeiro, consideremos a figura abaixo, onde marcamos um dos ângulos externos no vértice A de um triângulo ABC.

Como de costume, denotemos por $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ as medidas dos ângulos internos de ABC, e por α a medida do

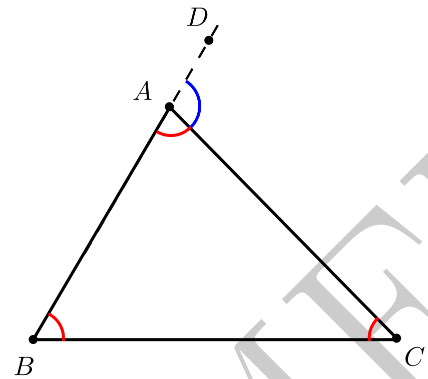

Figura 11: o teorema do ângulo externo.

ângulo externo $\angle CAD$, marcado na figura. Conforme vimos anteriormente, temos $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$, de forma que

$$\widehat{B}+\widehat{C}=180°-\widehat{A}.$$

Por outro lado, $\alpha+\widehat{A}=C\widehat{A}D+C\widehat{A}B=180°$, de modo que

$$\alpha=180°-\widehat{A}.$$

Comparando as expressões obtidas acima para $\widehat{B}+\widehat{C}$ e α, é imediato que

$$\widehat{B}+\widehat{C}=\alpha,$$

conforme queríamos mostrar.

Uma consequência simples do teorema do ângulo externo é o fato de que a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo (um ângulo externo por vértice) é sempre igual a $360°$.

De fato, nas notações da Figura 11, denotando por β e γ, respectivamante, as medidas dos ângulos externos nos vértices B e C, temos, pelo teorema do ângulo externo,

$$\alpha=\widehat{B}+\widehat{C};$$
$$\beta=\widehat{A}+\widehat{C};$$
$$\gamma=\widehat{A}+\widehat{B}.$$

Agora, somando membro a membro as igualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=(\widehat{B}+\widehat{C})+(\widehat{A}+\widehat{C})+(\widehat{A}+\widehat{B})\\&=2(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C})\\&=2\cdot 180°=360°.\end{aligned}$$

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para discutir este material. Os conceitos relativos a triângulos devem ser fartamente ilustrados, a fim de que os alunos possam reconhecê-los sem dificuldade. O teorema sobre a soma dos ângulos de um triângulo deve ser deduzido, e não simplesmente enunciado, a fim de que os alunos apreciem a importância da utilização do método dedutivo em Geometria. É, porém, útil começar a discussão desse tema intuindo o resultado através de recortes com cartolina, por exemplo, pois isso facilitará a compreensão por parte dos alunos. As referências contêm mais material relacionado aos tópicos reunidos aqui.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.