# Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

## Teorema do Valor Médio - Parte IV

## Tópicos Adicionais

**Autor: Prof. Tiago Caúla Ribeiro**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**15 de Dezembro de 2025**

Portal OBMEP

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta continuação da aula, propomos e solucionamos vários problemas relacionados ao teorema do valor médio (TVM), discutido na aula anterior.

# 1 Exemplos

**Exemplo 1.** *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções de classe* $C^1$*, cujas derivadas são positivas e crescentes. Prove que existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = f'(c)g'(c).$$

**Solução.** Defina $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ pela regra

$$h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{g(b) - g(a)}{b - a} - f'(x)g'(x).$$

Como $f'$ e $g'$ são contínuas, $h$ também é contínua. Além disso, pelo TVM, valem as relações

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0), \quad \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(x_1),$$

para certos $x_0, x_1 \in (a, b)$. Usando o fato de que $f', g'$ são crescentes, obtemos as desigualdades

$$f'(a) < f'(x_0) < f'(b), \quad g'(a) < g'(x_1) < g'(b),$$

as quais, pelas positividades de $f'$ e $g'$, podem ser multiplicadas para gerar a relação

$$f'(a)g'(a) < f'(x_0)g'(x_1) < f'(b)g'(b).$$

Uma vez que $h(x) = f'(x_0)g'(x_1) - f'(x)g'(x)$, em termos de $h$, as desigualdades acima significam que $h(a) > 0 > h(b)$; portanto, pelo TVI, existe um $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$, o que fornece a relação desejada. $\square$

Para o próximo exemplo, recorde que, para $x, y, n \in \mathbb{Z}$, com $n > 1$, escrevemos $x \equiv y \pmod{n}$ (lê-se *x é congruente a*

Portal OBMEP

$y$, *módulo* $n$) para significar que $n$ divide $x - y$. Utilizaremos um resultado clássico da teoria de congruências de números, o *pequeno teorema de Fermat*[1]: se $p$ for um número primo, então

$$a^p \equiv a \pmod{p},$$

para todo inteiro $a$.

**Exemplo 2.** *Sejam $p$ um número primo e $a$, $b$, $c$, $d$ inteiros positivos, dois a dois distintos e tais que $a^p + b^p = c^p + d^p$. Mostre que*

$$|a - c| + |b - d| \geq p.$$

**Solução.** Pelo pequeno teorema de Fermat, temos

$$a + b \equiv a^p + b^p = c^p + d^p \equiv c + d \pmod{p}.$$

Portanto, $p$ divide $(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d)$, de sorte que $(a - c) + (b - d) = 0$ (isto é, $a - c = d - b$) ou

$$p \leq |(a - c) + (b - d)| \leq |a - c| + |b - d|.$$

Assim, basta mostrar que a primeira alternativa não ocorre.

Com efeito, começamos observando que não há perda de generalidade em supor que $a$ e $c$ são os dois maiores números do conjunto $\{a, b, c, d\}$, com $a > c$. Desse modo, se tivéssemos $a - c = d - b$, valeria $b < d < c < a$.

Sendo $f(x) = x^p$, com $x > 0$, a igualdade $a^p - c^p = d^p - b^p$ é o mesmo que $f(a) - f(c) = f(d) - f(b)$. Aplicando a ela o teorema do valor médio, concluímos que existem números reais $u$ e $v$ tais que $b < u < d$, $c < v < a$ e $f(a) - f(c) = f'(v)(a - c)$, $f(d) - f(b) = f'(u)(d - b)$. Assim,

$$pv^{p-1}(a - c) = pu^{p-1}(d - b).$$

Todavia, uma vez que $a - c = d - b > 0$, a última igualdade acima implica $u^{p-1} = v^{p-1}$, gerando a contradição $u = v$.[2] $\square$

[1] Confira o corolário 3 da aula *O Pequeno Teorema de Fermat - Parte 1*, no módulo *Aritmética dos Restos*.

[2] Compare com o argumento apresentado na solução do último exemplo da 3ª parte dessa aula.

Portal OBMEP

**Exemplo 3** (Romênia - 1996). *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo não degenerado,* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função derivável e*

$$J = \left\{ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \,;\, a, b \in I,\, a < b \right\}.$$

*Mostre que:*

$(a)$ $J$ *é um intervalo;*

$(b)$ $J \subset f'(I)$ *e* $f'(I) \setminus J$ *contém no máximo dois pontos, quais sejam, os extremos de* $J$*;*

$(c)$ *Usando os itens* $(a)$ *e* $(b)$*, deduza que* $f'$ *tem a propriedade do valor intermediário.* [3]

**Solução.** Para o item (a), pela proposição 14 da aula *Continuidade em um ponto - Parte II*, no módulo *Funções Contínuas*, basta provar que

$$r, s \in J, \text{ e } r < t < s \Rightarrow t \in J.$$

De acordo com a definição de $J$, existem $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$ em $I$ tais que

$$r = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} \quad \text{e} \quad s = \frac{f(b_2) - f(a_2)}{b_2 - a_2}.$$

O TVM assegura a existência de reais $c_1 \in (a_1, b_1)$ e $c_2 \in (a_2, b_2)$ tais que

$$f'(c_1) = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} \quad \text{e} \quad f'(c_2) = \frac{f(b_2) - f(a_2)}{b_2 - a_2}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $c_1 < c_2$. Sendo $f'(c_1) < t < f'(c_2)$, a definição de derivada e o teorema de

[3] Dizemos que uma função tem a propriedade do valor intermediário quando ela transforma subintervalos de seu domínio em intervalos. A propriedade do item (c) é conhecida como o *teorema de Darboux*, em homenagem a seu descobridor, o matemático francês Gaston Darboux. A esse respeito, veja, também, a aula *Propriedades - Parte I*, no módulo *Derivada como Função*.

Portal OBMEP

permanência do sinal garantem a existência de $h \in (0, c_2 - c_1)$ de tal modo que

$$\frac{f(c_1 + h) - f(c_1)}{h} < t < \frac{f(c_2) - f(c_2 - h)}{h}.$$

Sendo $g : [c_1, c_2 - h] \to \mathbb{R}$ a função contínua definida por

$$g(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

as desigualdades acima significam que $g(c_1) < t < g(c_2 - h)$. Pelo TVI, vale $t = g(x_0)$ para algum $x_0 \in (c_1, c_2 - h)$, de sorte que $t \in J$. (Observe que $\operatorname{Im} g \subset J$.)

Quanto ao item (b), a inclusão $J \subset f'(I)$ segue imediatamente do TVM. Realmente, um elemento típico de $J$ é da forma $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, com $a < b$ em $I$; pelo TVM, tal quociente é igual a $f'(c)$, para algum $c \in (a, b)$ (logo, $c \in I$).

Por outro lado, se $\alpha = \inf f'(I)$ e $\beta = \sup f'(I)$ [4], o argumento do penúltimo parágrafo mostrou que $(\alpha, \beta) \subset J$ (verifique!), de onde segue que $f'(I) \setminus J \subset \{\alpha, \beta\}$. Daí, $f'(I)$ (resp. $J$) é um intervalo de extremos $\alpha$ e $\beta$.

Para encerrar, dado um subintervalo $K \subset I$, o argumento acima, quando aplicado à restrição $f|_K$, garante que $f'(K)$ é um intervalo. Logo, $f'$ transforma qualquer subintervalo de $I$ em um intervalo, isto é, $f'$ tem a propriedade do valor intermediário. $\square$

O próximo exemplo traz um belo resultado do matemático francês do século XIX Joseph Liouville. A respeito dele, confira também a seção *Dicas para o Professor*.

**Exemplo 4.** *Seja $P$ um polinômio de coeficientes inteiros e de grau $n > 0$. Se $\alpha$ for uma raiz irracional de $P$, mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^n}, \tag{1}$$

[4]Estamos adotando a convenção de que, se $X \subset \mathbb{R}$, $\inf X = -\infty$ ou $\sup X = +\infty$, conforme $X$ seja ilimitado inferior ou superiormente, respectivamente.

Portal OBMEP

*para todo racional $p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$.*

**Prova.** Sejam $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ as raízes reais distintas de $P$. Defina $\delta > 0$ por meio da relação $2\delta = \min\{|\alpha_1 - \alpha_j|\,;\, 1 < j \le r\}$, se $r > 1$, e $\delta = 1$ caso tenhamos $r = 1$. Dessa forma, fica claro que $\alpha$ deve ser a única raiz de $P$ no intervalo fechado $J := [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

Sendo $P'$ uma função polinomial e, portanto, contínua, o teorema dos valores extremos garante que $P'$ é limitada em $J$, digamos $|P'| \le K$, sendo $K$ uma constante positiva. Pelo corolário 5 da aula anterior, vale

$$|P(x) - P(y)| \le K|x - y|, \quad \forall\, x, y \in J.$$

Nessa desigualdade, fazendo $x = p/q$ (um racional do intervalo $J$) e $y = \alpha$, obtemos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \ge \frac{|P(p/q)|}{K}, \tag{2}$$

já que $P(\alpha) = 0$.

Como $P$ é um polinômio de coeficientes inteiros e grau $n$, cada denominador na expressão de $P(p/q)$ é um divisor de $q^n$, de sorte que $q^n P(p/q)$ é um inteiro, necessariamente não nulo. (Por que?) Daí, $q^n|P(p/q)| \ge 1$, de sorte que a relação (2) faz concluir que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \ge \frac{1/K}{q^n}. \tag{3}$$

Se, por outro lado, $p/q \notin J$, então

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \ge \delta \ge \frac{\delta}{q^n}, \tag{4}$$

pois $q^n \ge 1$.

Por fim, a relação (1) segue de (3) e (4) se tomarmos $C = \min\{1/K, \delta\}$. $\square$

**Exemplo 5.** *Para quaisquer números reais positivos $a, b$, mostre que $a^b + b^a > 1$.*

Portal OBMEP

**Solução.** Se tivermos $a \geq 1$ ou $b \geq 1$ o resultado segue, pois uma potência de base maior ou igual a 1 e expoente positivo é maior que ou igual a 1. Assim, podemos supor $0 < a, b < 1$.

Pondo $A := a^{-1}$, $B := b^{-1}$, temos $A, B > 1$ e

$$a^b + b^a = \frac{1}{A^b} + \frac{1}{B^a} = \frac{A^b + B^a}{A^b B^a}.$$

Daí, a desigualdade $a^b + b^a > 1$ equivale a

$$A^b B^a < A^b + B^a,$$

ou seja, basta provar que

$$(A^b - 1)(B^a - 1) < 1. \tag{5}$$

Aplicando o TVM à função $f : (0 + \infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^b$, relativamente ao intervalo $[1, A]$, concluímos que existe um número real $C$ no intervalo $(1, A)$ tal que

$$\begin{aligned} A^b - 1 &= f(A) - f(1) = (A - 1)f'(C) \\ &= (A - 1)bC^{b-1} = \frac{A - 1}{BC^{1-b}}. \end{aligned}$$

Segue da desigualdade $1 - b > 0$ que $C^{1-b} > 1$, o que por sua vez implica

$$A^b - 1 < \frac{A - 1}{B}. \tag{6}$$

Analogamente, vale

$$B^a - 1 < \frac{B - 1}{A}, \tag{7}$$

de sorte que, multiplicando membro a membro (6) e (7), obtemos

$$\begin{aligned} (A^b - 1)(B^a - 1) &< \frac{A - 1}{B} \cdot \frac{B - 1}{A} \\ &= \frac{A - 1}{A} \cdot \frac{B - 1}{B} < 1. \end{aligned}$$

Isso estabelece (5) e encerra a demonstração. $\square$

Portal OBMEP

Para o último exemplo, a seguinte definição se mostrará útil.

Diremos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ cresce *fortemente* em $c \in I$ se $(x-c)(f(x)-f(c)) > 0$ para todo $x \neq c$ em $I$. De outro modo, $f$ cresce fortemente em $c$ se, para cada $x \in I$,

$$x < c \Rightarrow f(x) < f(c) \ \text{ e } \ x > c \Rightarrow f(x) > f(c).$$[5]

**Exemplo 6** (IMC - 2012). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continuamente derivável e tal que $f'(t) > f(f(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Prove que $f(f(f(t))) \leq 0$ para todo $t \geq 0$.*

**Solução.** Se $f(f(c)) \geq 0$, afirmamos que $f$ cresce fortemente em $c$. Com efeito, temos por hipótese que $f'(c) > f(f(c))$, de modo que $f'(c) > 0$. Daí, $f$ cresce no ponto $c$, no sentido de que, para algum $\delta > 0$, vale a implicação

$$c - \delta \leq x < c < y \leq c + \delta \Rightarrow f(x) < f(c) < f(y).$$

Mostremos que $x < c \Rightarrow f(x) < f(c)$. De fato, se tal implicação fosse falsa, valeria $f(x_0) \geq f(c)$ para algum $x_0 < c - \delta$. Daí, as desigualdades $f(c-\delta) < f(c) \leq f(x_0)$ forneceriam, graças ao TVI, a relação $f(x_1) = c$ para algum $x_1 \in [x_0, c - \delta)$. Além disso, podemos supor que $x_1$ é a maior solução de $f(x) = c$ no intervalo $[x_0, c-\delta)$. Em particular, vale $f(x) \neq f(c)$ para cada $x \in (x_1, c)$.

Todavia, $f'(x_1) > f(f(x_1)) = f(f(c)) \geq 0$, de sorte que $f$ cresce em $x_1$. Sendo $f$ crescente nos extremos do intervalo $[x_1, c]$, temos $f(x) > f(x_1) = f(c) > f(y)$ para todo $x > x_1$ suficientemente próximo de $x_1$ e para cada $y < c$ suficientemente próximo de $c$. Então, o TVI garantiria que $f(x_2) = f(c)$ para algum $x_2 \in (x_1, c - \delta)$, contradizendo a escolha de $x_1$.

Do mesmo modo, prova-se que $x > c \Rightarrow f(x) > f(c)$, o que justifica a afirmação feita no início.

Agora, digamos que $f(f(f(t)))$ seja positivo para um certo $t \geq 0$. Então, $f$ cresce fortemente em $f(t)$ e afirmamos que $f(f(t))$ também é positivo. Isso é imediato

[5] Compare com o lema 5 da aula *Propriedades - Parte I*, no módulo *Derivada como Função.*



Portal OBMEP

se $f(f(t)) \geq f(f(f(t)))$. Caso contrário, a desigualdade $f(f(t)) < f(f(f(t)))$, aliada ao fato de que $f$ cresce fortemente em $f(t)$, dá $f(t) < f(f(t))$. Iterando o argumento, obtemos $t < f(t)$. Daí, $0 \leq t < f(t) < f(f(t))$ e a afirmação segue.

Da relação $f(f(t)) > 0$, vemos que $f$ também cresce fortemente em $t$. Portanto, $x > t \Rightarrow f(x) > f(t)$ e, utilizando mais uma vez o fato de que $f$ cresce fortemente em $f(t)$, a desigualdade anterior implica $f(f(x)) > f(f(t))$. Logo, $x > t \Rightarrow f'(x) > f(f(x)) > f(f(t))$. Pondo $K := f(f(t))$, seguem as relações $K > 0$ e $f' > K$ em $(t, +\infty)$.

Afirmamos que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. De fato, se $x > t$, o TVM garante a existência de $y \in (t, x)$ tal que

$$f(x) = f(t) + f'(y)(x - t) > f(t) + K(x - t).$$

Como $f(t) + K(x - t) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$, segue que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty. \tag{8}$$

Portanto, $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$ e, por conta da desigualdade $f' > f \circ f$, segue a afirmação.

Mostremos que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = +\infty. \tag{9}$$

Com efeito, se $t_0 > 0$ for tal que $f' > 2$ em $(t_0, +\infty)$, então, dado $x > t_0$, o TVM aplicado à função $f - \mathrm{Id}$ permite escrever

$$f(x) - x = A + (f'(c_x) - 1)(x - t_0),$$

em que $A := f(t_0) - t_0$ e $c_x \in (t_0, x)$. Logo, $f(x) - x > A + x - t_0$, de onde é fácil concluir (9).

Fixado $t_1 > t$ suficientemente grande para que se tenha $f - \mathrm{Id} > 1$ em $J := [t_1, +\infty)$, afirmamos que $f \circ f$ é crescente em $J$. Realmente, a desigualdade $f > \mathrm{Id} + 1$ garante que $f$ aplica $J$ em si mesmo. Como $f$ é crescente em $(t, +\infty)$ (pois $f' > 0$ nesse intervalo) e $(t, +\infty) \supset J$, segue que $f|_J : J \to J$ é crescente e, portanto, $(f \circ f)|_J = (f|_J) \circ (f|_J)$ também o é.

Portal OBMEP

Assim, dado $x > t_1$, uma última aplicação do TVM assegura a validade da relação

$$f(f(x)) - f(x) = f'(a)(f(x) - x),$$

em que $x < a < f(x)$ (considere $f$ restrita ao intervalo $[x, f(x)]$). Desse modo, pelas considerações anteriores, temos

$$f(f(x)) - f(x) > f(f(a)) \cdot 1 > f(f(x)) \Rightarrow f(x) < 0$$

para todo $x > t_1$, o que contradiz (8).

Por fim, essa contradição garante que a relação $f(f(f(t))) > 0$ para algum $t \geq 0$ é impossível. Portanto, devemos ter $f \circ f \circ f \leq 0$ em $[0, +\infty)$. $\square$

## Dicas para o Professor

No exemplo 5 da aula *Exercícios - Parte I*, do módulo *Fórmulas de Diferenciação*, estabelecemos a *desigualdade de Bernoulli*:

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \tag{10}$$

para $x \geq -1$ e $\alpha \geq 1$. Também mostramos que a igualdade em (10) ocorre se, e somente se, $x = 0$ ou $\alpha = 1$.

Agora, suponha $0 < \alpha < 1$, mantendo a hipótese $x \geq -1$. Nesse caso, vale a seguinte versão da desigualdade (10), com o *sinal de desigualdade invertido*:

$$(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x, \tag{11}$$

com igualdade se, e só se, $x = 0$.

Realmente, a igualdade em (11) vale se tivermos $x = 0$; caso contrário, a versão estrita da desigualdade de Bernoulli, com $\alpha x$ no lugar de $x$ [6] e $1/\alpha$ no lugar de $\alpha$, dá

$$(1 + \alpha x)^{1/\alpha} > 1 + \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha x = 1 + x,$$

[6] Note que $0 < \alpha < 1$, $x \geq -1 \Rightarrow \alpha x \geq -\alpha > -1$.



Portal OBMEP

de onde segue que

$$1 + \alpha x > (1 + x)^{\alpha}.$$

Agora, vejamos como a desigualdade (11) implica as relações (6) e (7) (nas hipóteses consideradas), permitindo uma solução diferente do exemplo 5.

Com efeito, basta tomar $x = A - 1$ e $\alpha = b$ em (11), obtemos

$$A^b < 1 + b(A - 1) \Leftrightarrow A^b - 1 < b(A - 1),$$

que nada mais é que (6). A desigualdade (7) segue de modo análogo.

Um número (complexo) $a$ é dito *algébrico* quando $a$ for raiz de uma equação polinomial (não identicamente nula) de coeficientes inteiros. Por exemplo, todo número racional é algébrico; $\sqrt{2}$ e a unidade imaginária $i$ também são algébricos. Por outro lado, se $t \in \mathbb{C}$ não for algébrico, dizemos que $t$ é transcendente; $\pi$ e o número de Euler $e$ são exemplos de números transcendentes.

Em 1851, Liouville apresentou o primeiro exemplo explícito (em termos de representação decimal) de número transcendente, qual seja, o número $\ell := 0,110001\ldots$, em que a $k$-ésima casa decimal é igual a 1, se $k = n!$, com $n \in \mathbb{N}$, e as demais casas decimais são nulas. Perceba que $\ell$ é irracional, pois sua representação decimal não é periódica.

Por outro lado, se $p_n/q_n$ for a fração irredutível do número racional $0,110001\ldots01$, formado a partir das $n!$ primeiras casas decimais de $\ell$, não é difícil mostrar que

$$\left|\ell - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Daí, uma simples aplicação do teorema de Liouville (exemplo 4) permite concluir a transcendência de $\ell$ [7].

[7] Para uma demonstração desse fato, juntamente com uma apresentação das propriedades elementares dos números algébricos, veja a seção 8.3 da referência [1].

Portal OBMEP

Em relação à solução do exemplo 6, vemos que a hipótese de continuidade de $f'$ não foi utilizada. Além disso, com pequenas adaptações no argumento, é possível provar que $f \circ f \circ f < 0$ em $(0, +\infty)$.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 6. Polinômios.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2016.


Portal OBMEP