

**Material Teórico - Módulo de NÚMEROS NATURAIS: REPRESENTAÇÃO E
OPERAÇÕES BÁSICAS**

Representações dos números naturais

Sexto Ano do Ensino Fundamental

**Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto**

4 de julho de 2020



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 O que é um número?

Logo nos primeiros anos de escola, aprendemos diversas habilidades essenciais à vida de qualquer pessoa. Uma das mais fundamentais é a capacidade de leitura. Sem ela, você não seria capaz de entender o que está escrito neste texto e, conseqüentemente, não teria a oportunidade de aprender sobre os novos conteúdos que serão apresentados a seguir.

Na escola, também aprendemos outro conceito importantíssimo: a noção de número. Porém, diferentemente do que ocorre com o estudo da língua oficial, cujos alfabeto, gramática e vocabulário variam muitíssimo de um país para outro, os símbolos utilizados para representar os números são praticamente universais. Bem, pelo menos no planeta Terra! ☺

Por exemplo, o número 125 (que é escrito por extenso como *cento e vinte e cinco*) possui o mesmo significado no Brasil, na França e no Japão. É apenas "falado" de maneira distinta em cada língua.

Neste módulo, estudaremos as origens e as propriedades dos números naturais. Para tanto, utilizaremos o **sistema de numeração decimal**. Neste sistema, os agrupamentos são feitos de 10 em 10 (daí o nome *decimal*) e os **algarismos** (que, em verdade, são símbolos) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 representam as quantidades de grupos presentes em cada posição.

Exemplo 1. O número 359 é utilizado para representar 3 grupos de 100 (denominados *centenas*), 5 grupos de 10 (denominados *dezenas*) e 9 grupos de 1 (as *unidades*).

Os algarismos que utilizamos têm sua origem no sistema indo-arábico, que era apenas um dentre diversos sistemas numéricos do mundo antigo. Esse sistema se sobressaiu em relação aos demais por apresentar uma maneira mais prática de resolver operações básicas, como adição e multiplicação, além de conter uma quantidade relativamente pequena de símbolos.

Não se sabe ao certo qual foi o primeiro sistema de numeração utilizado, mas provavelmente foi um sistema baseado em contagem. Nesse sistema, os números de 1 a 6 eram representados como no quadro abaixo:



É fácil ver por que tal sistema não é mais utilizado nos dias de hoje: basta que imaginemos o tamanho da etiqueta que seria utilizada para mostrar o preço de um objeto que custe mais de 1.000 reais! ☺

Outros sistemas, mais elaborados, foram desenvolvidos por sociedades avançadas do mundo antigo. Nesse sentido, os exemplos mais notáveis são o **sistema egípcio** e o **sistema romano**.

2 O sistema egípcio






O sistema egípcio, assim como o sistema decimal, também era baseado em agrupamentos de potências de 10. Cada uma dessas potências era representada por um *hieróglifo*¹.

A maior parte do nosso conhecimento sobre esse sistema vem do Papiro de Moscou (1.850 a.C.) e do Papiro de Rhind (1.650 a.C.)².



Figura 1: Parte do Papiro de Rhind.

Na tabela a seguir, mostramos a equivalência entre hieróglifos e algumas potências de 10 do sistema decimal.

				
10	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵

Na escrita hieroglífica, o número 1 era representado por um segmento vertical | e cada número era representado utilizando a menor quantidade de hieróglifos. Por exemplo, o número 10.243 era representado como:



3 O sistema romano

O sistema romano, que ainda hoje pode ser encontrado em relógios com estilo clássico, livros e monumentos históricos, também é baseado em potências de 10, mas com uma diferença: há símbolos intermediários entre duas potências de 10 consecutivas.

¹Hieróglifos são os símbolos que formavam o sistema de escrita do antigo Egito. Em grego, *hieróglifo* significa *escrita sagrada*. Esse nome, portanto, reflete o fato de que, no Egito antigo, apenas alguns grupos, como os sacerdotes, os escribas e os membros da realeza, tinham o direito de dominar a arte de ler e escrever tais símbolos.

²Os papiros de Rhind e de Moscou são documentos da antiga civilização Egípcia que tratam sobre a Matemática praticada à época. Os nomes *Moscou* e *Rhind* devem-se ao fato de que tais documentos foram descobertos pelo egiptólogo russo (a capital da Rússia é Moscou!) Vladimir Golenishchev e pelo antiquário escocês Alexander Rhind, respectivamente.

Os primeiros símbolos do sistema romano são:

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

No sistema romano, os números também devem ser representados utilizando-se sempre a menor quantidade possível de símbolos e escrevendo-se os símbolos que representam quantidade maiores mais à esquerda. Por exemplo, o número 2.018 é representado como MMXVIII.

Por outro lado, o sistema romano também permite utilizar-se a “subtração” de símbolos escrevendo um símbolo de quantidade menor imediatamente à esquerda do símbolo de quantidade maior. Por exemplo, 4 escreve-se como IV e 99 escreve-se como XCIX.

Assim, a simples tarefa de escrever os números no sistema romano é um bom exercício de cálculo mental.



Figura 2: Alguns relógios construídos em estilo clássico ainda adotam o sistema romano para representar os números.

4 O sistema indo-arábico

Conforme mencionamos no início desse material, o sistema que estamos acostumados a utilizar em nosso cotidiano é chamado de *indo-arábico*.

Antes de comentarmos um pouco sobre a história desse sistema, apresentemos algumas de suas propriedades matemáticas que ajudam a explicar os motivos pelos quais esse sistema se sobressaiu em relação aos demais.

- O sistema indo-arábico é **decimal**. Isso significa que os números são agrupados em potências de 10. Assim, dez unidades são agrupadas em uma dezena, dez dezenas são agrupadas em uma centena, e assim por diante.

- O sistema indo-arábico é **posicional**. Isso significa que a posição que um algarismo ocupa na representação altera a quantidade que ele representa.

O sistema decimal já era empregado pelos egípcios. Foi a propriedade posicional que deu ao sistema indo-arábico uma vantagem inovadora: a capacidade de representar qualquer número inteiro utilizando uma *quantidade finita* de símbolos.

Também vale observar que, para que o sistema posicional funcione, é necessário a utilização de um símbolo (o zero) para representar casas decimais vazias. Assim, com o uso do 0 evitamos uma possível ambiguidade na representação dos números, conforme ilustrado pelo seguinte

Exemplo 2. *Considere os números 237 e 20370. Sem o algarismo 0 ambos seriam representados da mesma forma.*

As casas decimais são lidas da direita para a esquerda pois é essa orientação que é adotada na língua árabe. Assim, a casa mais à direita é a primeira casa e é chamada de **unidade**, enquanto a segunda casa é chamada de **dezena**. Continuando, temos a **centena**, a **unidade de milhar**, a **dezena de milhar**, a **centena de milhar**, a **unidade de milhão** e assim sucessivamente.

A fim de facilitar a compreensão de números muito grandes, é costume agruparmos as casas em conjuntos de três, da direita para a esquerda. Esses agrupamentos de três casas se tornam evidentes pela utilização de um ponto ou de um espaço um pouco maior entre o símbolo inicial de um agrupamento e o símbolo final do próximo. Tal disposição também facilita a comunicação oral dos números.

Exemplo 3. *O diâmetro do Sol mede aproximadamente 1.392.700km, ou seja, um milhão, trezentos e noventa e dois mil e setecentos quilômetros.*

Note, ainda, que os símbolos utilizados para representar os algarismos decimais são estes apenas por uma questão histórica; nada impede, por exemplo, que tivéssemos chegado aos dias de hoje usando o símbolo \square para representar quatro unidades. Além disso, mesmo que a ordem dos símbolos atuais fosse trocada (por exemplo, que escrevêssemos 3 para representar duas unidades e 2 para representar três unidades), as propriedades do sistema decimal continuariam mantidas.

Exemplo 4. *Se a ordem dos algarismos decimais fosse 1, 3, 0, 2, 4, 9, 5, 7, 6, 8 em vez da que conhecemos, qual seria o valor da soma $98 + 34$?*

Solução. Com os símbolos na ordem usual, a soma do enunciado é $59 + 14$, logo, vale 73. Então, na nova ordem dos símbolos, o resultado é 72.

Alternativamente, observe que com essa nova disposição dos algarismos, teríamos

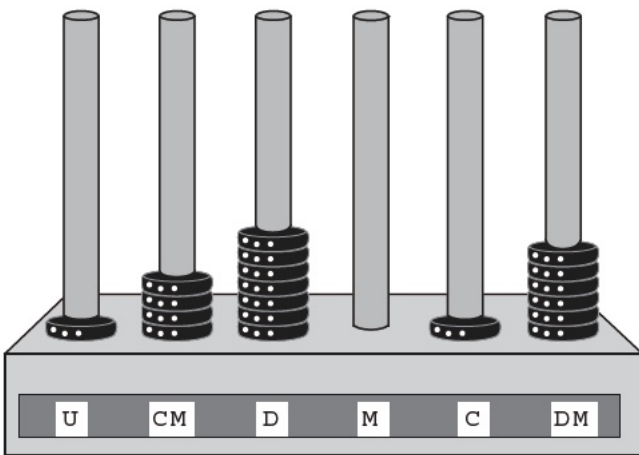
$$8 + 4 = 32, \quad 9 + 3 = 5 \quad \text{e} \quad 5 + 3 = 7.$$

Daí, podemos efetuar a adição: □

$$\begin{array}{r} 98 \\ + 34 \\ \hline 72 \end{array}$$

Exercício 5 (ENEM 2016). O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base 10 para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM, que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para a esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda.

Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.



Nessa disposição, o número que está representado na figura é

- (a) 46171.
- (b) 147016.
- (c) 171064.
- (d) 460171.
- (e) 610741.

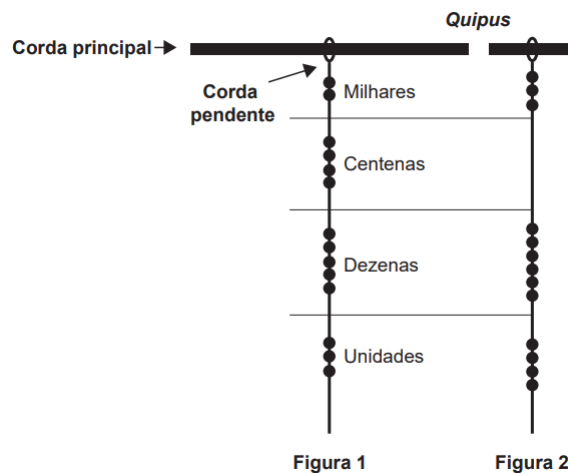
Solução. A seguir, mostramos a correspondência usual: $U \rightarrow 1$; $D \rightarrow 7$; $C \rightarrow 1$; $M \rightarrow 0$; $DM \rightarrow 6$; $CM \rightarrow 4$. Portanto, o número representado no ábaco da figura é 460171, o que corresponde ao item (d). □

Exercício 6 (ENEM 2012). João decidiu contratar os serviços de uma empresa por telefone, através do SAC (Serviço de Atendimento ao Consumidor). O atendente ditou para João o número de protocolo de atendimento da ligação e pediu que ele o anotasse. Entretanto, João não entendeu um dos algarismos ditados pelo atendente e anotou o número 13□98207, sendo que o espaço vazio é o do algarismo que João não entendeu. De acordo com essas informações, a posição ocupada pelo algarismo que falta no número de protocolo é a de?

- (a) centena.
- (b) dezena de milhar.
- (c) centena de milhar.
- (d) milhão.
- (e) centena de milhão.

Solução. O gabarito é o item (c), pois, de acordo com a interpretação do enunciado, 7 corresponde ao algarismo das unidades, 0 ao das dezenas, 2 às centenas, 8 às unidades de milhar, 9 às dezenas de milhar e, finalmente, o algarismo que está faltando corresponde ao algarismo das centenas de milhar. □

Exercício 7 (ENEM 2014). Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós, denominado quipus. O quipus era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura 1, o quipus representa o número decimal 2453. Para representar o “zero” em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.



O número da representação do quipus da Figura 2, em base decimal, é:

- (a) 364.
- (b) 463.
- (c) 3064.
- (d) 3640.
- (e) 4603.

Solução. Olhando a figura, percebemos que há 3 bolinhas na casa das unidades de milhar, nenhuma na casa das centenas, 6 na casa das dezenas e 4 na casa das unidades. Logo, temos o número 3064. □

5 Um pouco mais de história

Os símbolos que utilizamos para representar os algarismos são evoluções dos símbolos criados por povos indianos, há muitos séculos, no vale do rio Indo, onde hoje é o Paquistão.

Baseando-se em avanços já concebidos por outros povos, como a base decimal empregada pelos egípcios, foi criado um sistema constituído por dez símbolos, como mostrado na primeira linha da figura 3.

Originalmente, esse sistema era não-posicional. Mais especificamente, colocar um dos símbolos à direita ou à esquerda de outro não alterava o número gerado através da concatenação dos símbolos. Após receberem influências de outros povos com os quais tiveram contato, foi desenvolvida a noção posicional do sistema, tornando-o muito próximo do que conhecemos hoje.

	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	oito	nove	zero
século VI (indiano)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
século IX (indiano)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
século X (árabe oriental)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
século X (europeu)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
século XI (árabe oriental)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
século XII (europeu)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
século XIII (árabe oriental)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
século XIII (europeu)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
século XIV (árabe ocidental)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
século XV (árabe oriental)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
século XV (europeu)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Figura 3: Evolução dos símbolos do sistema Indo-arábico.

O sistema criado pelos povos indianos foi aperfeiçoado e popularizado fora da Ásia pelos árabes e persas. Acredita-se que o responsável pela introdução dos algarismos indo-arábicos e dos conceitos algébricos básicos na Europa foi o matemático persa³ *Abu Abd Allah Muhammad ibn Musa*

³O povo iraniano é descendente direto dos antigos persas.

al-Khwarizmi.. Especula-se que al-Khwarizmi viveu entre os anos 780 e 850 da era cristã, tendo nascido na região onde atualmente encontra-se o Uzbequistão. A palavra *algorismi* é a versão latina do nome al-Khwarizmi e deu origem à palavra algarismo⁴. Para saber mais sobre o matemático al-Khwarizmi, recomendamos o livro [1].



Figura 4: Estátua de al-Khwarizmi na cidade de Itchan Kala, Uzbequistão.

6 Sugestões ao professores

O professor pode realizar a seguinte experiência com sua turma: pergunte aos alunos sobre suas preferências entre os sistemas romano ou decimal. Alguns deles talvez fiquem confusos e não saibam responder. Então, peça que eles somem mentalmente XIII+LIV e meça o tempo necessário para fazer essa operação. Agora, peça que eles somem mentalmente 13 + 54 e meça o tempo novamente. Mostre-os que se trata exatamente da mesma operação e pergunte-os novamente sobre a preferência deles. A ideia é fazer com que os alunos percebam a praticidade do sistema decimal em detrimento do sistema romano.

Outra atividade interessante é separar os alunos em equipes e pedir para que cada grupo crie um sistema de representação numérica. O sistema deverá ser *consistente*, ou seja, cada número deve ter uma representação única. Em seguida, abra uma discussão sobre as vantagens e desvantagens de cada sistema criado.

Referências

[1] C. Brezina. *Al-Khwarizmi: The Inventor of Algebra*. Great Muslim Philosophers and Scientists of the Middle Ages. Rosen Publishing Group, 2006.

⁴A palavra dígito, sinônima de ‘algarismo’, provém de *digitus*, que em Latim significa ‘dedo’.