Material Teórico - Módulo Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Divisão de funções polinomiais (complexas)

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de março de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Divisão de funções polinomiais complexas

Após aprender a *multiplicar*, é natural nos perguntarmos como *dividir* polinômios. A operação de divisão é, naturalmente, a inversa da multiplicação. Por exemplo, pelo que vimos no módulo anterior, é possível calcular, usando a propriedade distributiva, que

$$(x^2 - 3x + 7)(x + 1) = x^3 - 2x^2 + 4x + 7.$$

Disso, podemos escrever

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x + 7}{x + 1} = x^2 - 3x + 7,$$

ou, de modo equivalente,

$$(x^3 - 2x^2 + 4x + 7) \div (x + 1) = x^2 - 3x + 7.$$

O método que usaremos no exemplo a seguir não é o mais eficiente (veremos outro melhor ao longo da aula), mas ele ajuda a entender o problema.

Exemplo 1. *Sejam*

$$p(x) = x^5 + 5x^4 + 13x^2 - 9x - 6 \quad e \quad h(x) = x^2 + 3.$$

Calcule o quociente $\frac{p(x)}{h(x)}$.

Solução. Queremos obter um polinômio $q(x)$ que satisfaça:

$$p(x) = h(x) \cdot q(x).$$

Como $p(x)$ possui grau 5 e $h(x)$ possui grau 2, é preciso que o grau de $q(x)$ seja 3 (pois $2+3 = 5$). Assim, podemos escrever $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Logo, aplicando a propriedade distributiva obtemos

$$\begin{aligned} h(x) \cdot q(x) &= (x^2 + 3)(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2) + (3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 3d) \\ &= ax^5 + bx^4 + (c + 3a)x^3 + (d + 3b)x^2 + 3cx + 3d. \end{aligned}$$

Como o resultado acima deve ser igual ao polinômio

$$p(x) = 1x^5 + 5x^4 + 0x^3 + 13x^2 - 9x - 6,$$

comparando os coeficientes, temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 5, \\ c + 3a = 0, \\ d + 3b = 13, \\ 3c = -9, \\ 3d = -6. \end{cases}$$

Demos sorte de que neste exemplo o sistema é bastante simples: as duas primeiras e as duas últimas equações já nos fornecem os valores $a = 1$, $b = 5$, $c = -3$ e $d = -2$. Entretanto, para garantir que realmente temos uma solução válida, ainda é preciso verificar que esses valores satisfazem as duas equações do meio:

$$\begin{aligned} c + 3a &= -3 + 3 \cdot 1 = -3 + 3 = 0 \quad \text{e} \\ d + 3b &= -2 + 3 \cdot 5 = 13. \end{aligned}$$

Com isso, podemos afirmar que

$$q(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 2,$$

é o resultado da divisão desejada. □

Em que pese o exemplo anterior, assim como o resultado da divisão de números naturais pode não resultar em um número natural, o resultado da divisão de dois polinômios pode não resultar em um polinômio. Isso acontece ou quando tentamos dividir um polinômio por outro que possui grau maior, ou quando, ao utilizar o método do exemplo anterior, obtemos um sistema impossível (isto é, que não possui solução). Conforme veremos no restante desta aula, podemos proceder com a divisão se aceitarmos obter um *quociente* e um *resto*.

No caso de números inteiros não negativos já sabemos que toda divisão resulta em um *quociente* e um *resto* (possivelmente igual a zero). Recordemos em um

Exemplo 2. *Ao dividir* 27 *por* 4 *obtemos como quociente o número* 6 *e como resto o número* 3*, já que* $27 = 6 \cdot 4 + 3$*.*

$$\begin{array}{r|l} 2\ 7 & 4 \\ \cline{2-2} -\ \underline{2\ 4} & 6 \\ 3 & \end{array}$$

Em geral, dados números inteiros não negativos a, b, q e r, com $b > 0$, dizemos que a *divisão inteira*[1] de a por b tem quociente q e deixa resto r quando $a = b \cdot q + r$, com $0 \leq r < q$. O número a é o *dividendo* e b é o *divisor* dessa operação.

$$\underbrace{a}_{\text{dividendo}} = \overbrace{b}^{\text{divisor}} \cdot \underbrace{q}_{\text{quociente}} + \overbrace{r}^{\text{resto}}$$

Para maiores detalhes sobre uma divisão geral entre dois inteiros não negativos, veja a aula "Teorema da Divisão Euclidiana" do módulo "Números Naturais: Contagem, Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana" do Oitavo Ano do Ensino Fundamental.

Com polinômios, temos exatamente a mesma relação. Mais precisamente, dados polinômios $p(x)$ e $d(x)$, a divisão de $p(x)$ por $d(x)$ resulta em um (polinômio) quociente $q(x)$ e um (polinômio) resto $r(x)$. *O resto, se não for nulo, deve possuir grau estritamente menor que o grau do divisor* e deve valer a relação:

$$\underbrace{p(x)}_{\text{dividendo}} = \overbrace{d(x)}^{\text{divisor}} \cdot \underbrace{q(x)}_{\text{quociente}} + \overbrace{r(x)}^{\text{resto}}.$$

Existe um dispositivo prático para calcular $q(x)$ e $r(x)$ que é muito parecido com aquele utilizado para a divisão

[1] Também denominada *divisão com resto* ou *divisão euclidiana*.

de inteiros positivos. Contudo, antes de mostrá-lo, é útil revisarmos os detalhes de uma divisão longa de inteiros.

Exemplo 3. *Realizemos a divisão de* 779 *por* 5*. (O passo a passo pode ser acompanhado também na vídeo-aula deste módulo).*

Para armar o dispositivo da divisão, devemos colocar o dividendo, 779, e o divisor, 5, como no diagrama a seguir. A divisão é efetuada tomando a menor quantidade possível de algarismos do dividendo, da esquerda para a direita, tal que possamos dividir este prefixo pelo divisor. Em nosso caso, devemos começar dividindo 7 *por* 5 *e, para tanto, procuramos mentalmente o maior número natural que, multiplicado por* 5*, não passa de* 7*.*

$$\begin{array}{rrr|l} \overline{7} & 7 & 9 & 5 \\ \cline{4-4} -5 & & & 1\,5\,5 \\ \cline{1-1} 2 & 7 & & \\ -2 & 5 & & \\ \cline{1-2} & 2 & 9 & \\ & -2 & 5 & \\ \cline{2-3} & & 4 & \end{array}$$

Obviamente, tal número é o quociente de 7 *por* 5*, que é igual a 1, pois* $1 \times 5 < 7$ *e* $2 \times 5 > 7$*. Este* 1 *será o primeiro algarismo do quociente de* 779 *por* 5 *e deverá ser escrito abaixo do divisor, separado dele pela barra barra horizontal do dispositivo de divisão. Depois, efetuamos o produto* 1×5 *e escrevemos o resultado da operação (isto é, 5) abaixo do algarismo* 7 *do dividendo e realizamos a subtração:* $7 - 5 = 2$*, conforme indicado no diagrama. Em seguida, "baixamos" o primeiro algarismo não utilizado do dividendo (no caso,* 7*), colocando-o ao lado do* 2 *que acabamos de obter.*

Agora, repetimos todo o processo: dividimos 27 *por* 5*, obtendo quociente* 5*, que é escrito abaixo do divisor (à direita do algarismo* 1 *que havíamos colocado anteriormente)*[2] *É fácil*

[2] Observação: há casos em que o quociente dessa divisão é zero; ainda assim, esse zero deve ser escrito abaixo do divisor; depois continuamos o processo, baixando o algarismo seguinte do dividendo.

ver que $5 \times 5 = 25$*, o que é escrito abaixo do* 27 *para podermos efetuar a subtração* $27 - 25 = 2$*. Agora, baixamos o* 9 *e repetimos mais uma vez esse processo, até que tenhamos esgotado todos os algarismos do dividendo e tenhamos encontrado um resto menor que o divisor (no nosso exemplo, o resto é* 4*).*

Porque o processo descrito no exemplo anterior funciona? Veja que $779 = 700+70+9$. Ao dividir o algarismo 7 por 5, na verdade estamos dividindo 7 centenas (que é o que o primeiro algarismo 7 representa em 779) por 5, obtendo: $7 = 5 \cdot 1 + 2$ centenas. De forma equivalente, temos $700 = 5 \cdot 100 + 200$. Isso determina que o quociente será composto de 1 centena. Para continuar, escrevemos:

$$779 = 700 + 79 = 5 \cdot 100 + 200 + 79 = 5 \cdot 100 + 279. \quad (1)$$

Para continuar a divisão, agora é preciso dividir 279 por 5. Veja que o primeiro passo desta divisão é justamente dividir as 27 dezenas (pois $279 = 27 \cdot 10 + 9$) por 5, o que é exatamente o que fizemos no dispositivo prático. Como $27 = 5 \cdot 5 + 2$ dezenas, temos que $270 = 5 \cdot 50 + 20$ e, portanto,

$$279 = 270 + 9 = 5 \cdot 50 + 20 + 9 = 5 \cdot 50 + 29.$$

Substituindo isso na equação (1), ficamos com:

$$\begin{aligned} 779 &= 5 \cdot 100 + 5 \cdot 50 + 29 \\ &= 5 \cdot (100 + 50) + 29 \\ &= 5 \cdot 150 + 29. \end{aligned}$$

Por fim, dividimos 29 por 5, obtendo $29 = 5 \cdot 5 + 4$. Daí,

$$\begin{aligned} 779 &= 5 \cdot 150 + 29 = 5 \cdot 150 + 5 \cdot 5 + 4 \\ &= 5 \cdot (150 + 5) + 4 \\ &= 5 \cdot 155 + 4. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que o quociente é 155 e o resto é 4.

Agora, seguiremos passos essencialmente idênticos aos acima para executar uma divisão entre polinômios. A diferença é que o papel dos algarismos das centenas, dezenas, unidades é realizado pelos coeficientes dos monômios. Assim, *começamos dividindo o monômio de maior grau do dividendo pelo monômio de maior grau do divisor.* Vejamos como proceder examinando em detalhe o seguinte

Exemplo 4. *Calcule o quociente e o resto da divisão de*

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + x - 3 \quad por \quad d(x) = x^2 - 2.$$

Solução. Neste exemplo, temos o dividendo $x^3 - 4x^2 + x - 3$ e o divisor $x^2 - 2$, e montamos o dispositivo prático abaixo. O passo a passo abaixo, também pode ser visto na videoaula deste material.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -\,4x^2 & +\,x & -\,3 & x^2 - 2 \\ \cline{5-5} & & & & \end{array}$$

Como explicado antes do exemplo, começamos dividindo x^3 por x^2. O resultado é x, que é escrito abaixo do divisor:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -\,4x^2 & +\,x & -\,3 & x^2 - 2 \\ \cline{5-5} & & & & x \end{array}$$

Em seguida, multiplicamos x pelo divisor, obtendo $x(x^2 - 2) = x^3 - 2x$. Queremos subtrair esse valor do dividendo, logo, invertemos o sinal de cada monômio e somamos o resultado ao dividendo. Tomamos o cuidado de escrever cada monômio abaixo do monômio de mesmo grau para realizar a soma:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -\,4x^2 & +\,x & -\,3 & x^2 - 2 \\ \cline{5-5} -\,x^3 & & +\,2x & & x \\ \cline{1-3} & -\,4x^2 & +\,3x & -\,3 & \end{array}$$

Agora, temos um resto parcial, $-4x^2 + 3x - 3$, e continuamos seguindo o mesmo método para dividir este resto pelo divisor original $(x^2 - 2)$.

Dividindo $-4x^2$ por x^2 obtemos -4. Escrevemos o -4 abaixo do divisor, multiplicamos ele pelo divisor, invertemos o sinal e somamos ao resto parcial atual para obter um novo resto.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\,4x^2 & +\,x & -\,3 & x^2-2 \\ \cline{5-5}
-\,x^3 & & +\,2x & & x-4 \\ \cline{1-3}
& -\,4x^2 & +\,3x & -\,3 & \\
& 4x^2 & & -\,8 & \\ \cline{2-4}
& & 3x & -\,11 &
\end{array}$$

Nesse estágio, temos um resto que tem grau menor que o divisor. Portante, este é nosso resto final.

Dessa forma, concluímos que o quociente da divisão é $x-4$ e o resto $3x-11$. Veja ainda que vale:

$$\underbrace{x^3-4x^2+x-3}_{\text{dividendo}} = \overbrace{(x^2-2)}^{\text{divisor}} \cdot \underbrace{(x-4)}_{\text{quociente}} + \overbrace{(3x-11)}^{\text{resto}}.$$

$\square$

Exemplo 5. *Efetue a divisão de* $f(x)=6x^4-x^3+3x^2-x+1$ *por* $g(x)=2x^2+x-3$.

Solução. Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, começamos dividindo o monômio $6x^4$ por $2x^2$, de onde obtemos $3x^2$. Multiplicando isso pelo divisor, invertendo o sinal e somando ao dividendo, obtemos o seguinte:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -\,x^3 & +\,3x^2 & -\,x & +\,1 & 2x^2+x-3 \\ \cline{6-6}
-\,6x^4 & -\,3x^3 & +\,9x^2 & & & 3x^2 \\ \cline{1-3}
& -\,4x^3 & +\,12x^2 & -\,x & &
\end{array}$$

Note que na terceira linha acima, baixamos apenas o "$-x$" e não o "$+1$". Isso é opcional, porque sabemos que vamos precisar usar apenas 3 monômios no passo seguinte. A intenção é apenas deixar o dispositivo mais "limpo". Contudo, caso você baixe o "1" não há qualquer problema e processo continua da mesma forma. Como ainda não baixamos o $+1$ precisaremos lembrar de fazer isso mais à frente. Observe que isso é o análogo do que fizemos com o algarismo "9" no Exemplo 3 (na divisão 779 por 5).

Prosseguindo, dividimos $-4x^3$ por $2x^2$, obtemos $-2x$ e acrescentamos as próximas linhas ao dispositivo:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -\,x^3 & +\,3x^2 & -\,x & +\,1 & 2x^2+x-3 \\ \cline{6-6}
-\,6x^4 & -\,3x^3 & +\,9x^2 & & & 3x^2-2x \\ \cline{1-3}
 & -\,4x^3 & +\,12x^2 & -\,x & & \\
 & 4x^3 & +\,2x^2 & -\,6x & & \\ \cline{2-4}
 & & 14x^2 & -\,7x & +\,1 &
\end{array}$$

Veja que, nesse passo, precisamos baixar o $+1$ para dar continuidade.

Por fim, dividindo $14x^2$ por $2x^2$ obtemos 7 e terminamos a divisão como segue:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -\,x^3 & +\,3x^2 & -\,x & +\,1 & 2x^2+x-3 \\ \cline{6-6}
-\,6x^4 & -\,3x^3 & +\,9x^2 & & & 3x^2-2x+7 \\ \cline{1-3}
 & -\,4x^3 & +\,12x^2 & -\,x & & \\
 & 4x^3 & +\,2x^2 & -\,6x & & \\ \cline{2-4}
 & & 14x^2 & -\,7x & +\,1 & \\
 & & -\,14x^2 & -\,7x & +\,21 & \\ \cline{3-5}
 & & & -\,14x & +\,22 &
\end{array}$$

Assim, temos o quociente $3x^2-2x+7$ e o resto $-14x+22$. Veja também que:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{dividendo}} = \overbrace{g(x)}^{\text{divisor}} \cdot \underbrace{(3x^2-2x+7)}_{\text{quociente}} + \overbrace{(-14x+22)}^{\text{resto}}.$$

□

Um ponto importante é que os coeficientes envolvidos nas divisões acima não necessitam ser inteiros. De fato, eles não precisam nem ser números reais (uma vez que permitimos polinômios com coeficientes complexos).

Exemplo 6. *Neste exemplo, realizamos a divisão de*

$$5x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 \quad \textit{por} \quad 3x^2 - 3.$$

Veja como fica o dispositivo.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & -\,x^3 & +\,3x^2 & -\,x & +\,1 & 3x^2-3 \\ \cline{6-6}
-\,5x^4 & & +\,5x^2 & & & \frac{5}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3} \\ \cline{1-3}
 & -\,x^3 & +\,8x^2 & -\,x & & \\
 & x^3 & & -\,x & & \\ \cline{2-4}
 & & 8x^2 & -\,2x & +\,1 & \\
 & & -\,8x^2 & & +\,8 & \\ \cline{3-5}
 & & & -\,2x & +\,9 &
\end{array}
$$

(Tente decifrar o passo a passo que foi executado para obtê-lo.)

Assim, o quociente e o resto são, respectivamente,

$$q(x) = \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \quad e \quad r(x) = -2x + 9.$$

No exemplo a seguir, tratamos de casos onde o dividendo possui algum de seus coeficientes igual a zero.

Exemplo 7. *Calcule o quociente, $q(x)$, e o resto, $r(x)$, da divisão de $p(x)$ por $d(x)$ em cada caso abaixo:*

(a) $p(x) = x^4 - 1$ *e* $d(x) = x^2 + 2x + 1.$

(b) $p(x) = -x^3 - 4x^2 + 3$ *e* $d(x) = x^2 - 2x.$

Solução.
(a) Ao montar o dispositivo da divisão, vamos completar $p(x)$ de forma que apareçam todos os monômios com expoentes menores ou iguais ao grau de $p(x)$. Os monômios que não apareciam originalmente em $p(x)$ são incluídos com coeficiente igual a zero (o que não altera o valor de $p(x)$). Isso ajuda com que o dispositivo tenha o tamanho adequado para realizar o restante da divisão e organiza suas "colunas". Assim, fazemos

$$p(x) = x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$$

e obtemos

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & -1 & x^2+2x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -2x^3 & -x^2 & & & x^2-2x+3 \\ \cline{1-3}
 & -2x^3 & -x^2 & +0x & & \\
 & 2x^3 & +4x^2 & +2x & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x^2 & +2x & -1 & \\
 & & -3x^2 & -6x & -3 & \\ \cline{3-5}
 & & & -4x & -4 &
\end{array}
$$

Veja que o quociente é $q(x) = x^2 - 2x + 3$ e o resto é $r(x) = -4x - 4$.

(b) Executando a divisão, obtemos o seguinte:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-x^3 & -4x^2 & +0x & +3 & x^2-2x\,. \\ \cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & & & -x-6 \\ \cline{1-2}
 & -6x^2 & +0x & & \\
 & 6x^2 & -12x & & \\ \cline{2-3}
 & & -12x & +3 &
\end{array}
$$

Logo, temos o quociente $q(x) = -x-6$ e o resto $-12x+3$. $\square$

É possível demonstrar que, para quaisquer polinômios $p(x)$ e $d(x)$ (com coeficientes complexos), o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por $r(x)$ são unicamente determinados. É importante lembrar que a definição de quociente e resto requer que, além de serem funções polinomiais que satisfazem $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$, o polinômio $r(x)$ seja constante e igual a zero ou tenha grau (estritamente) menor que o grau de $d(x)$.

Se ignorarmos a condição sobre os graus, existem vários outros polinômios $q'(x)$ e $r'(x)$ que satisfazem a igualdade $p(x) = d(x) \cdot q'(x) + r'(x)$.

No caso em que o resto, $r(x)$ é a função constante igual zero, temos que $p(x) = d(x) \cdot q(x)$. Em uma tal situação, dizemos que $p(x)$ é **divisível** por $d(x)$, ou que $d(x)$ é um **fator** de $p(x)$.

Dicas para o Professor

Sugerimos que conteúdo deste material seja coberto em dois encontros de 50 minutos. A demonstração de que o quociente e o resto de uma divisão são unicamente determinados é relativamente curta, mas exige um pouco mais de maturidade e foge do escopo dessa aula. Recomendamos que os interessados nela vejam a referência [1] abaixo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios, Equações.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.