Material Teórico - Tópicos Adicionais - Recorrências

Recorrências - Parte 1

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

15 de dezembro de 2019

1 Sequências

Neste módulo iremos estudar *recorrências*. Mas antes, precisamos relembrar alguns conceitos e notações fundamentais.

Lembre-se de que um conjunto é definido, de modo intuitivo e ingênuo, como uma coleção de objetos (de qualquer natureza). No Ensino Superior aprende-se que essa definição simplificada de conjunto *não* é muito precisa e pode nos levar a *paradoxos* (isto é, *contradições*).[1] Porém, não cabe aqui um estudo aprofundado da Teoria dos Conjunto e, portanto, vamos nos limitar a essa noção simplificada.

Quando um conjunto é pequeno o bastante (tem poucos elementos), podemos descrevê-lo simplesmente listando cada um de seus elementos. Ao fazer isso para conjuntos devemos usar *chaves*, $\{\ldots\}$, em torno de seus elementos, separando-os por vírgulas. Por exemplo, ao escrever $X = \{1, \sqrt{2}, \pi\}$ estamos dizendo que o conjunto chamado X coleciona três elementos: 1, $\sqrt{2}$ e π.

Dois fatos muito importantes acerca de conjuntos são que um conjunto só "*enxerga*" uma cópia de um mesmo elemento e que a ordem em que os elementos são listados num conjunto não o altera. Por exemplo, $\{\pi, \sqrt{2}, 1\}$ e $\{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1,1\}$ também são iguais ao conjunto X acima.

Conjuntos também podem ser definidos através de uma ou mais condições que seus elementos devam satisfazer. Isto é especialmente útil para conjuntos grandes, nos quais seja inviável listar todos os elementos. Em casos como este, o conjunto inclui todos os elementos de um dado universo que satisfazem a(s) propriedade(s) especificada(s). Por exemplo, podemos tomar Y como o conjunto de todos os números inteiros maiores ou iguais a 10, e essa *declaração* fornece o conjunto $Y = \{10,11,12,13,\ldots\}$.

Um conjunto pode ser finito ou infinito. Vamos representar por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.[2].

Por sua vez, uma **sequência** é uma *lista ordenada* de objetos, aos quais nos referimos como seus **termos**. Sequências são representadas listando seus termos entre parênteses, $(\ldots)$, separando-os por vírgula. Por exemplo, $T = (1, \sqrt{2}, \pi)$ é uma sequência de três termos, cujo primeiro termo é o número 1, cujo segundo é o número $\sqrt{2}$ e cujo terceiro é o número π. Aqui, a ordem dos elementos é crucial, de modo que $(\pi, \sqrt{2}, 1)$ representa outra sequência. Além disso, não há problema em haver elementos repetidos. Por exemplo, (x, x, y) representa uma sequência com três termos, enquanto (x, y) representa outra sequência, com apenas dois termos (uma sequência de dois termos é o mesmo que um par ordenado).

Os termos de uma sequência podem ser de qualquer natureza (podem ser números, conjuntos, etc), mas aqui vamos considerar apenas sequências de números reais. Por outro lado, se T é uma sequência, vamos representar por T_1 seu primeiro elemento, por T_2 o segundo elemento, por T_3 o terceiro, e assim sucessivamente. Em geral, se n é um número natural, dizemos que T_n é o ***n*-ésimo termo** da sequência, e por essa razão é costume nos referirmos à sequência T também por $(T_n)_{n\geq 1}$.

Sequências também podem ser infinitas, desde que sejam *enumeráveis*, ou seja, tais que a cada número natural n corresponda um termo da sequência, como acima.[3] Se for infinita, uma sequência pode ser descrita através de uma "lei de formação". Vejamos um exemplo dessa situação.

Exemplo 1. *Considere a sequência $(T_n)_{n\geq 1}$ em que $T_n = 5n$ para todo $n \geq 1$. Temos, então, que a sequência é $(5, 10, 15, 20, \ldots)$. Isso pode ser observado simplesmente substituindo os valores de n na lei de formação. Por exemplo, temos que $T_1 = 5\cdot 1 = 5$, $T_2 = 5\cdot 2 = 10$, $T_3 = 3\cdot 5 = 15$, e assim por diante. Outro exemplo é a sequência $(S_n)_{n\geq 1}$ em que $S_n = 3n + 1$, para todo $n \geq 1$. Temos, então, que a sequência em questão é $(4, 7, 10, 13, \ldots)$.*

Algumas vezes, sequências são usadas para modelar situações-problema, e nesses casos pode ser mais interessante começar a indexar seus elementos a partir do zero, denotando a sequência por $(T_0, T_1, T_2, \ldots)$ no lugar de $(T_1, T_2, T_3, \ldots)$; da mesma forma, às vezes podemos começar a contar a partir de um número maior, por exemplo, $(T_7, T_8, T_9, \ldots)$. Para isso, basta especificar para quais valores de n o T_n está definido. No último exemplo, bastaria especificar que T_n está definido apenas para $n \geq 7$, de sorte que poderíamos nos referir à sequência como $(T_n)_{n\geq 7}$.

Pelo que vimos no exemplo anterior, dada a lei de formação podemos calcular qualquer termo da sequência. Em geral, não é possível fazer o oposto, ou seja, dados alguns termos de uma sequência, não há como garantir com toda certeza qual é a lei de formação. Por exemplo, se escrevermos apenas que a sequência é $T = (1, 3, 5, \ldots)$, então não

[1] Esses problemas foram apontados e estudados profundamente pelos matemáticos alemães Georg Cantor e Richard Dedekind, por volta de 1874. Eles deram o pontapé inicial ao ramo da Matemática hoje conhecido como a moderna Teoria dos Conjuntos para a qual, nos anos seguintes, foram propostos diversos *sistemas axiomáticos*. Esses sistemas axiomáticos estabelecem regras claras do que é permitido fazer ao "criar" um conjunto. Como consequência de tais regras, temos, por exemplo, que um conjunto pode ser uma coleção de conjuntos (inclusive, um dos elementos da coleção pode ser ele próprio). Entretanto, é possível mostrar que não existe um conjunto ao qual pertencem *todos* os conjuntos existentes.

[2] Alguns preferem definir $\mathbb{N}$ como $\{0, 1, 2, \ldots\}$ (incluindo o número zero). Dependendo do contexto, isso pode ser vantajoso ou não, por isso não há um consenso. O importante é escolher uma notação e permanecer com ela, não sendo permitido alternar de uma para a outra em um mesmo texto. Observamos, contudo, que se o nome *números naturais* se refere a números naturalmente associados à tarefa de contar, então é mais razoável que 0 não seja incluído; de fato, a Civilização Ocidental só incorporou o uso do 0 em meados do século XVI.

[3] Em verdade, alguns textos de Ensino Superior consideram que uma sequência é obrigatoriamente infinita. Neste caso, o que chamamos aqui de sequência (finita) com n termos passa a ser chamada ***n*-upla**. Por simplicidade, aqui não faremos distinção entre as duas coisas.

haverá como garantir qual será o próximo termo da mesma. Uma escolha natural seria que o próximo termo fosse 7, pois poderíamos pensar que a propriedade que define a sequência seria que T_n fosse o n-ésimo número ímpar positivo. Mas isso é apenas um "chute", pois existem infinitas outras sequências que possuem os mesmos três primeiros termos e seguem um outro padrão. Por exemplo, nada impede que a sequência seja $T_n = -\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{n}{6}$. Vejamos: substituindo n por 1, 2 e 3, obtemos, respectivamente:

$$T_1 = -\frac{1^3}{6} + 1^2 + \frac{1}{6} = 1,$$
$$T_2 = -\frac{2^3}{6} + 2^2 + \frac{2}{6} = -\frac{8}{6} + 4 + \frac{2}{6} = 3,$$
$$T_3 = -\frac{3^3}{6} + 3^2 + \frac{3}{6} = -\frac{27}{6} + 9 + \frac{3}{6} = 5.$$

Contudo, ainda neste caso, o próximo termo da sequência seria

$$T_4 = -\frac{4^3}{6} + 4^2 + \frac{4}{6} = -\frac{64}{6} + 16 + \frac{4}{6} = 6,$$

e não 7.

Outro exemplo claramente ambíguo é o da sequência $(3, 5, 7, \ldots)$, que poderia ser a sequência dos números ímpares maiores que 1 listados em ordem crescente, poderia ser a sequência dos números primos ímpares listados em ordem crescente, ou qualquer outra sequência que comece com 3, 5, 7. Em outros casos, a lei de formação pode ser algo muito difícil de se identificar.

Exemplo 2. *Encontre uma lei de formação simples para a sequência que começa com* $(2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, \ldots)$ *e sugira o próximo termo.*

Solução. Uma possível sequência que satisfaz o problema é a sequência obtida escrevendo-se em ordem crescente os números naturais cujo nome, em Português, começa pela letra "d": dois, dez, doze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove, ... Com isso, o próximo termo da sequência seria duzentos. □

No exemplo acima, não há como garantir que a sequência seja obrigatoriamente a que sugerimos na solução; demos apenas uma sugestão de sequência que satisfaz o problema. Contudo, ficaríamos muitos surpresos caso venha a existir outra sequência que comece com os mesmos termos e possa ser descrita de modo tão elegante quanto a da solução. De todo modo, elegância é algo subjetivo e foge do escopo da Matemática. Além disso, nada impede que existam outras soluções elegantes que simplesmente não conseguimos encontrar.

2 Sequências recorrentes

Como vimos acima, listar apenas alguns termos de uma sequência não é o bastante para identificarmos com certeza com qual sequência estamos lidando. Idealmente, é preciso fornecer a lei de formação dos termos. Contudo, nem sempre é fácil obter essa lei ou, o que é pior, ela pode não ser simples o bastante para que seja útil.

Outra forma comum de identificar unicamente uma sequência é exibir uma **relação de recorrência** para ela. Uma (relação de) recorrência para uma sequência é uma expressão que nos permite calcular um termo da sequência em função de seus termos anteriores.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3. *Seja* $(T_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência tal que* $T_1 = 3$ *e que satisfaz a relação*

$$T_{n+1} = 2T_n + 1, \tag{1}$$

para todo n natural. Veja que o "+1" do lado esquerdo da equação está sendo somado ao n e não ao valor do termo T_n*; por outro lado, o "+1" do lado direito está sendo somado a* $2T_n$*. Isso quer dizer que cada termo da sequência, a partir do segundo (isto é, o termo* T_{n+1}*), pode ser obtido multiplicando-se o termo anterior (isto é, o termo* T_n*) por 2 e somando 1 ao resultado.*

A recorrência, por si, não identifica unicamente a sequência T. Precisamos de um pontapé inicial, o qual é fornecido pelo valor escolhido para T_1*. Em nosso caso, como sabemos que* $T_1 = 3$*, substituindo* $n = 1$ *na relação (1) obtemos* $T_2 = 2 \cdot T_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$*. Agora, substituindo* $n = 2$ *na mesma relação, obtemos* $T_3 = 2T_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$*. Em seguida, substituindo* $n = 3$*, temos* $T_4 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$*. Para* $n = 4$*, temos* $T_5 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$*. Assim, temos que* $T = (3, 7, 15, 31, 63, \ldots)$*.*

Exemplo 4. *Considere a recorrência* $T_{n+1} = T_n + 2$*. Caso o valor de* T_1 *seja igual a 1, obtemos a sequência dos números ímpares positivos:* $(1, 3, 5, 7, \ldots)$*. Caso o valor de* T_1 *seja igual a 2, obtemos a sequência dos números pares positivos:* $(2, 4, 6, 8, \ldots)$*. Por outro lado, não é preciso que* T_1 *seja inteiro. Por exemplo, se tivermos* $T_1 = \sqrt{2}$*, obtemos a sequência* $(\sqrt{2}, \sqrt{2} + 2, \sqrt{2} + 4, \sqrt{2} + 6, \ldots)$*.*

Exemplo 5. *Se r é número real fixado, uma sequência T que satisfaça a equação de recorrência* $T_{n+1} = T_n + r$ *para todo n natural é chamada de* **progressão aritmética***. Nesse caso, o número r é denominado de* **razão** *da progressão aritmética. Por exemplo, a sequência em que* $T_1 = 4$ *e* $T_{n+1} = T_n + 6$*, ou seja, a sequência* $T = (4, 10, 16, 22, \ldots)$*, é uma progressão aritmética de razão 6 e primeiro termo 4.*

Exemplo 6. *Se q é um número real fixado, uma sequência T que satisfaça a equação de recorrência* $T_{n+1} = qT_n$ *para todo n natural é chamada de* **progressão geométrica***. Neste caso, o número q é denominado a* **razão** *dessa progressão geométrica. Por exemplo, a sequência em que* $T_1 = 2$ *e* $T_{n+1} = 3T_n$ *é uma progressão geométrica de razão 3 e primeiro termo 2. Temos que* $T = (2, 6, 18, 54, \ldots)$*.*

Em todos os exemplos vistos até agora, a expressão da relação de recorrência relaciona cada termo, a partir do segundo, com seu antecessor na sequência. Quando isso acontece, dizemos que a recorrência é de **primeira ordem**. Contudo, é possível que um recorrência relacione mais termos da sequência, conforme ilustram os dois exemplos a seguir.

Exemplo 7. *Considere a sequência F tal que $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

para todo n natural. Essa é a chamada **sequência de Fibonacci**[4]*, em homenagem ao matemático italiano do século XIII Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci. Calcule o valor de F_7.*

Solução. A relação $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, válida para todo n natural, nos diz que cada termo da sequência, a partir do terceiro, é obtido somando-se os dois termos imediatamente anteriores a ele. Assim, para calcular F_7 podemos usar que $F_7 = F_6 + F_5$, de sorte que precisaremos calcular primeiro F_6 e F_5; por sua vez, para obter F_6, precisaremos calcular F_5 e F_4, e assim por diante.

Pensando um pouco, parece ser mais fácil partir dos valores de F_1 e F_2 para obter primeiro F_3, depois F_4, F_5, F_6 e, por fim, F_7. Vejamos:

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3, \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5, \\ F_6 &= F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8, \\ F_7 &= F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13. \end{aligned}$$

□

Assim, $F = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$.

Um detalhe importante sobre a sequência de Fibonacci é que ela é uma **recorrência de segunda ordem**, por conta do fato de cada termo depender de seus dois antecessores imediatos. Para "dar o pontapé inicial" em recorrências desse tipo, precisamos especificar os valores de não apenas um, mas dos dois primeiros termos (como foi feito no exemplo, quando impusemos que fosse $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$). De outra forma, se nos fosse fornecido apenas F_1, não haveria como obter F_2 usando a lei de recorrência.

O exemplo seguinte trás uma recorrência que não é de primeira nem de segunda ordem, pois cada termo, à partir do terceiro, depende de todos os anteriores.

Exemplo 8. *Considere a sequência T em que $T_1 = 3$, $T_2 = 7$ e*

$$T_{n+1} = \frac{T_1 + \ldots + T_n}{n}$$

para todo $n \geq 2$. Calcule o valor de T_{100}.

[4] É costume utilizarmos a letra F para denotar a sequência de Fibonacci.

Solução. Um ponto importante a observar nesse exemplo é que a recorrência se aplica apenas para $n \geq 2$, ou seja, não podemos substituir n por 1 na expressão $T_{n+1} = \frac{T_1+\ldots+T_n}{n}$. Por outro lado, a recorrência nos diz que, a partir do terceiro termo, cada termo é obtido como a média aritmética de todos os termos anteriores. Por exemplo, fazendo $n = 2$ obtemos o terceiro termo:

$$T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5.$$

Para $n = 3$, obtemos:

$$T_4 = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3} = \frac{3 + 7 + 5}{3} = 5.$$

Para $n = 4$, obtemos:

$$T_5 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} = \frac{3 + 7 + 5 + 5}{4} = 5.$$

Em geral, não é difícil se convencer de que todos os demais termos da sequência serão iguais a 5. Isso acontece porque o novo termo adicionado sempre é igual à média aritmética dos anteriores, de forma que a média aritmética de todos os termos permanece inalterada.

Formalmente, podemos fazer um cálculo geral: suponha que $T_1 = 3$, $T_2 = 7$ e que, para certo $n \geq 3$, tenhamos $T_3 = T_4 = \ldots = T_n = 5$. Temos, então, que

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{3 + 7 + \overbrace{5 + 5 + \ldots + 5}^{n-2}}{n} \\ &= \frac{10 + 5(n-2)}{n} = \frac{5n}{n} = 5. \end{aligned}$$

Em particular, temos que $T_{100} = 5$. □

3 Modelagem de problemas

Uma relação de recorrência possui uma grande desvantagem em relação à lei de formação: a fim de calcular um termo da sequência, precisamos primeiro calcular termos anteriores a ele.

Por exemplo, se quiséssemos calcular T_{30} usando a equação (1), precisaríamos obter antes o valor de T_{29}; por sua vez, para isso precisaríamos obter os valores de T_{28}, T_{27} e assim sucessivamente, até chegarmos a um valor conhecido, como T_1.

Porém, nesse caso, com um pouco de astúcia é possível inferir e demonstrar (por exemplo, usando Indução Matemática) que a sequência do Exemplo 3 satisfaz a lei de formação $T_n = 2^{n+1} - 1$ para todo n natural. Uma vez feito isso, teremos conseguido utilizar a lei de recorrência e o termo inicial para obter a lei de formação da sequência.

Dependendo da recorrência que tenhamos, obter a lei de formação pode ser algo bastante difícil. Contudo, existem algumas recorrências comuns que podem ser *resolvidas* com certa facilidade (no sentido de, partindo delas, obtermos as leis de formação correspondentes). Estudaremos o processo de resolução de recorrências nas aulas seguintes. Nesta aula, centraremos nossa atenção apenas no processo de modelar certos problemas por relações de recorrência.

Exemplo 9. *Para $n \geq 3$ natural, seja S_n a soma, em graus, das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados. Assim, por exemplo, $S_3 = 180$ graus. Encontre uma recorrência que expressa S_{n+1} em função de S_n; em seguida, utilize-a para calcular os valores de S_4, S_5 e S_6.*

Solução. Considere um polígono convexo com $n+1$ vértices, digamos $v_1 v_2 \ldots v_n v_{n+1}$. Por definição, a soma de seus ângulos internos é igual a S_{n+1}.

Trace a diagonal $v_1 v_n$, que divide o polígono em dois polígonos menores: o triângulo $v_1 v_n v_{n+1}$ e o polígono de n lados $v_1 v_2 \ldots v_n$ (acompanhe na figura a seguir).

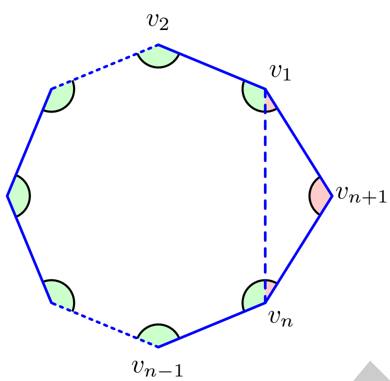


Figura 1: Um polígono de $n+1$ lados.

Observe que a soma dos ângulos internos do triângulo é S_3, ao passo que a dos ângulos internos de $v_1 v_2 \ldots v_n$ é S_n. Ademais, se somarmos todos esses ângulos o resultado será precisamente a soma dos ângulos internos do polígono original. Logo,

$$S_{n+1} = S_n + S_3 = S_n + 180.$$

Em particular, como $S_3 = 180$, temos que

$$\begin{aligned} S_4 &= S_3 + 180 = 180 + 180 = 2 \cdot 180 = 360, \\ S_5 &= S_4 + 180 = 360 + 180 = 3 \cdot 180 = 540, \\ S_6 &= S_5 + 180 = 540 + 180 = 4 \cdot 180 = 720. \end{aligned}$$

□

Na próxima aula, provaremos que a lei de formação da sequência do exemplo acima é $S_n = 180(n-2)$.

Exemplo 10. *Para $n \geq 3$ natural, seja D_n a quantidade de diagonais de um polígono convexo com n lados. Claramente, $D_3 = 0$. Encontre uma recorrência que expressa D_{n+1} em função de D_n e utilize-a para calcular os valores de D_4, D_5 e D_6.*

Solução. Como na solução do exemplo anterior, considere o polígono P_{n+1} de vértices $v_1 v_2 \ldots v_n v_{n+1}$, com $n+1$ lados. Vamos comparar o número de diagonais desse polígono com o número de diagonais do polígono $P_n = v_1 v_2 \ldots v_n$ (veja a figura a seguir).

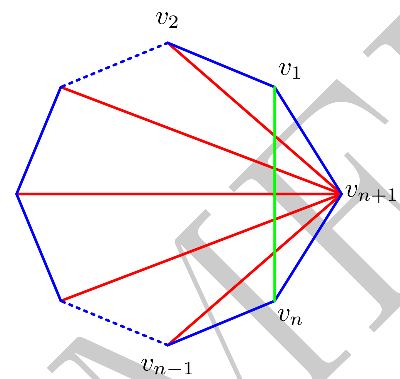


Figura 2: Um polígono de $n+1$ lados.

Lembre-se de que, por definição, P_n possui D_n diagonais. Também, podemos ver P_{n+1} como sendo obtido a partir de P_n pelo acréscimo do vértice v_{n+1}. No entanto, ao acrescentarmos o vértice v_{n+1}, o segmento $v_1 v_n$, que antes era lado de P_n, passa a ser diagonal de P_{n+1}. Além disso, existem n segmentos que partem de v_{n+1} até os vértices $v_1, \ldots, v_n$. No entanto, dois dentre eles, os segmentos $v_{n+1} v_1$ e $v_{n+1} v_n$, são lados (e não diagonais) de P_{n+1}, ao passo que os demais $n-2$ segmentos são diagonais de P_{n+1} que não eram diagonais de P_n.

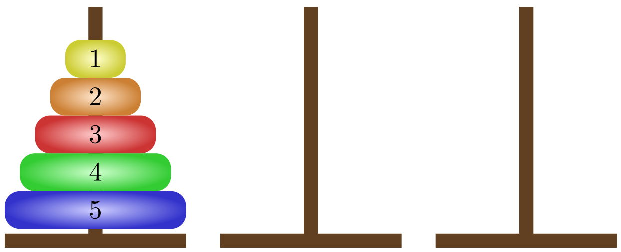
Assim, ao todo, P_{n+1} possui $1 + (n-2)$ diagonais além das que já existiam em P_n. Isso nos fornece a relação de recorrência

$$D_{n+1} = D_n + (n-1).$$

□

4 Torre de Hanoi

A Torre de Hanói é um quebra-cabeças que consiste em uma base contendo três pinos, sobre os quais são encaixados alguns discos de diferentes diâmetros, os quais devem formar torres. O número de discos pode variar de um jogo para outro, mas não há dois discos de mesmo diâmetro. Conforme mencionamos acima, a *principal regra* é que, em cada pino, os discos devem estar dispostos em *ordem decrescente de diâmetro de baixo para cima*, ou seja, acima de cada disco só podem ser colocados discos menores que ele. A figura abaixo mostra o estado inicial de um jogo com 5 discos, com todos eles encaixados em um mesmo pino.



É permitido mover o disco que está no topo de um dos pinos para outro pino, desde que se respeite a regra principal. Não é permitido mover mais de um disco em um único movimento. O objetivo do jogo é mover todos os discos para um pino diferente do original, utilizando a menor quantidade possível de movimentos.

Exemplo 11. *Para cada n natural, seja T_n o número mínimo de movimentos necessários para mover n discos de um pino da Torre de Hanoi para outra pino à sua escolha (assumindo que as outras duas torres estão inicialmente vazias). Encontre uma recorrência que expressa T_{n+1} em função de T_n.*

Solução. Vamos nomear os três pinos da Torre de Hanoi de A, B e C. Seja n um número natural e suponha que, inicialmente, temos $n+1$ discos dispostos sobre o pino A e que gostaríamos de mover todos eles para o pino B.

A ideia crucial é que, em algum momento, o disco de maior diâmetro precisará ser movido para o pino B. Contudo, a única maneira de fazer isso é se todos os demais discos tiverem sido movidos para a torre C. Como existem n outros discos, o menor número de movimentos necessários para mover todos eles do pino A para o pino C é T_n.

Uma vez feito isso, usamos mais um movimento para mover o maior disco de A para B. Por último, precisamos de pelo menos outros T_n movimentos para levar todos os demais discos de C para B (veja que a posição do maior disco não proíbe nenhuma movimentação dos discos menores).

Contabilizando os movimentos descritos acima, vemos que, ao todo, precisamos gasta no mínimo

$$T_n + 1 + T_n = 2T_n + 1$$

movimentos. Por fim, observamos que $T_1 = 1$. $\square$

5 A pizza de Steiner

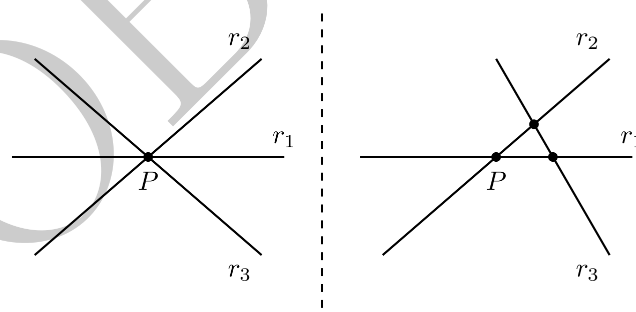
Exemplo 12. *O problema da Pizza de Steiner consiste em encontrar o maior número de regiões em que se pode dividir o plano utilizando-se n retas. Denotando esse valor por P_n, encontre uma recorrência que expresse P_{n+1} em função de P_n.*

Solução. Comecemos analisando o que acontece para valores pequenos de n.

Quando $n = 1$, temos que qualquer reta divide o plano em duas regiões (dois semi-planos). Logo, $P_1 = 2$.

Considere, agora, o caso em que $n = 2$. Ao traçar duas retas distintas (não coincidentes), temos duas possibilidades. Se as duas retas forem paralelas, o plano será dividido em 3 regiões; se elas não forem paralelas, o plano será dividido em 4 regiões. Como queremos o número máximo de regiões, temos que $P_2 = 4$.

Em seguida, vamos observar o caso $n = 3$. Assim como no caso anterior, não é difícil nos convencermos de que, a fim de maximizar o número de regiões, não vale a pena usar retas que sejam paralelas. Por exemplo, três paralelas nos dão um total de apenas 4 regiões, ao passo que se duas das três retas forem paralelas e a terceira for transversal a elas, obteremos um total de 6 regiões. Vamos começar, então tomando duas retas r_1 e r_2, concorrentes em um ponto P, e traçar uma terceira reta, a qual chamaremos r_3, concorrente com as duas. Há duas possibilidades para r_3: (i) ela também passa pelo ponto P, (ii) ela intersecta as retas r_1 e r_2 em pontos distintos (veja a figura abaixo). No caso (i) o plano é dividido em 6 regiões, enquanto que no caso (ii) ele é dividido em 7 regiões. Logo, $P_3 = 7$.



Por fim, com os exemplos anteriores em mente, vamos analisar o caso geral. Considere que n retas foram traçadas. Ao traçar uma reta adicional, qual o número máximo de novas regiões que podem ser criadas? O ponto crucial é perceber que a nova reta gera pelo menos um nova região no plano e, além desta, gera mais uma região toda vez que ela cruza uma das retas já existentes. Dessa forma, conseguimos gerar o maior número de regiões fazendo com que *a nova reta intersecte cada uma das n retas anteriores em n pontos distintos*.

O argumento do parágrafo anterior nos garante, com $n+1$ retas, um total de $n+1$ regiões adicionais às que já existiam com as n retas anteriores. Observe, ainda, que essa quantidade de novas regiões sempre pode ser atingida, independentemente de como as n retas anteriores tenham sido traçadas.

Dessa forma, quando temos $n+1$ retas, o número máximo de regiões é obtido acrescentando-se $n+1$ ao número máximo de regiões quando tínhamos n retas. Em símbolos, temos a relação de recorrência

$$P_{n+1} = P_n + (n+1),$$

para todo n natural. $\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo dessa aula seja abordado em dois encontros de 50 minutos. Considere também utilizar a vasta gama de materiais complementares disponíveis na web sobre esse tópico para aprofundar o estudo do mesmo, por exemplo, no site `https://poti.impa.br`. A referência a seguir também contém mais material sobre modelagem de problemas por recorrências.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4: Combinatória*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.