Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Limites – Parte 2

Resolução de Exercícios - Parte A

Tópicos Adicionais

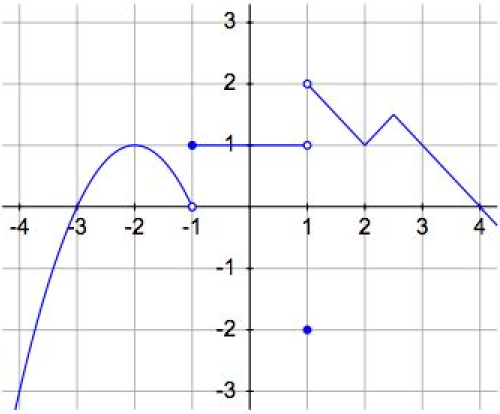
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

06 de novembro de 2020

1 Alguns exercícios

Nesta aula, reunimos alguns exercícios visando a exercitar os conceitos relativos a limites estudados até aqui.

Exemplo 1. *Em relação à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico se encontra esboçado na figura a seguir, pede-se calcular, se existirem,* $\lim_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 2} f(x)$.



Solução. Para calcular (se existir) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ a partir do esboço do gráfico, a ideia é fazer a variável independente x aproximar-se de -1 pela esquerda (uma vez que o limite é quando $x \to -1^-$) e perceber o que ocorre com os valores $f(x)$.

Nesse sentido, perceba que a curva que compõe o gráfico de f no intervalo $(-\infty, -1)$ não tem interrupções; também, à medida que $x \to -1^-$, é claro, a partir do gráfico, que o ponto $(x, f(x))$ se aproxima mais e mais do ponto $(-1,0)$, apesar desse último ponto não pertencer ao gráfico (observe a bolinha aberta em torno do ponto $(-1,0)$, indicando que ele não é um ponto do gráfico). Portanto,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0.$$

O comportamento do gráfico da função quando $x \to -1^+$ é completamente distinto do comportamento quando $x \to -1^-$. Primeiramente, veja que, se queremos fazer $x \to -1^+$, podemos nos restringir a valores de x maiores que -1 (pois o limite é pela direita) mas próximos a -1, digamos, $x \in (-1{,}0)$. Nesse intervalo, a função f é constante e igual a 1. Então, à medida que $x < 0$ se aproxima de -1 pela direita, os valores $f(x)$ não mudarão, valendo sempre 1, de sorte que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1.$$

Observe que, pelo esboço do gráfico, este último limite coincidiu com o valor $f(-1)$.

A situação em relação aos limites $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ é interessante, pois ambos diferirão do valor $f(1)$, que, pela figura, vale -2.

Realmente, para entender $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, podemos nos restringir a $x \in (0{,}1)$, em cujo caso $f(x) = 1$ sempre. Portanto,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1.$$

Por outro lado, para $x \to 1^+$, restrinjamos x ao intervalo $(1{,}2)$. Nesse caso, ao fazermos $x \to 1^+$, a figura mostra que o ponto $(x{,}f(x))$ percorre o segmento de extremidades $(2{,}1)$ e $(1{,}2)$, aproximando-se mais e mais desse último ponto. Portanto,

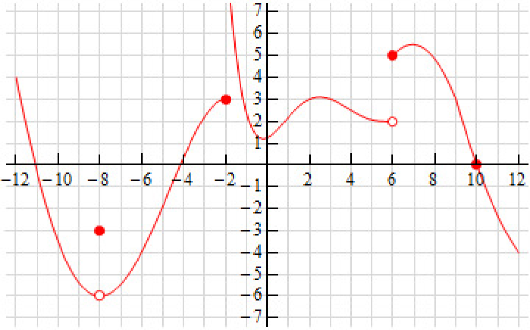
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2.$$

Por fim, o comportamento da função quando $x \to 2$ é mais regular. De fato, ainda que seu gráfico apresente uma "*quina*" no ponto $(2{,}1)$, quando $x \to 2^-$ e quando $x \to 2^+$ o ponto $(x{,}f(x))$ se aproxima do ponto $(2{,}1)$, de forma que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1.$$

Portanto, nesse caso $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe e também vale 1. $\square$

Exemplo 2. *Em relação à função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *cujo gráfico se encontra esboçado na figura a seguir, pede-se calcular, se existirem,* $\lim_{x\to -8} f(x)$, $\lim_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 10} f(x)$.



Solução. Para a função cujo gráfico está esboçado, temos claramente $f(-8)=-3$, como indica a bolinha vermelha cheia do desenho, no ponto $(-8,-3)$. Contudo, veja que, para $x\in(-\infty,-8)$, o gráfico de f é uma curva formada pelos pontos $(x,f(x))$, os quais se aproximam do ponto $(-8,-6)$ à medida que $x\to -8^-$. O mesmo sucede para a porção do gráfico de f correspondente aos valores $x\in(-8,-2]$: à medida que $x\to -8^+$, o ponto $(x,f(x))$ sobre o gráfico se aproxima do ponto $(-8,-6)$.

Esses comportamentos garantem que

$$\lim_{x\to -8^-} f(x) = \lim_{x\to -8^+} f(x) = -6,$$

de sorte que $\lim_{x\to -8} f(x)$ existe e também vale -6 (muito embora $f(-8)=-3$).

Para $x\to -2^-$, o gráfico esboçado mostra claramente que o ponto $(x,f(x))$ se aproxima de $(-2,3)$; portanto, temos $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 3$. Veja que, nesse caso, 3 também coincide com $f(-2)$.

Esse comportamento é totalmente diferente do que acontece quando $x\to -2^+$. Realmente, o esboço do gráfico mostra que, à medida que $x \to -2^+$, o ponto $(x,f(x))$ se aproxima da reta $x = -2$ mas os valores $f(x)$ tanto maiores quanto mais próximo de -2 a variável x estiver. Por conseguinte,

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty.$$

Por fim, para analisar o que sucede com o gráfico de f quando x varia em torno do valor 10, observe que o gráfico de f, para $x \geq 6$, é uma curva que não apresenta interrupções. Em particular, quando $x \to 10^-$ e quando $x \to 10^+$, o ponto $(x,f(x))$ sobre o gráfico se aproxima do ponto $(10,f(10))$, isto é, do ponto $(10,0)$. Assim,

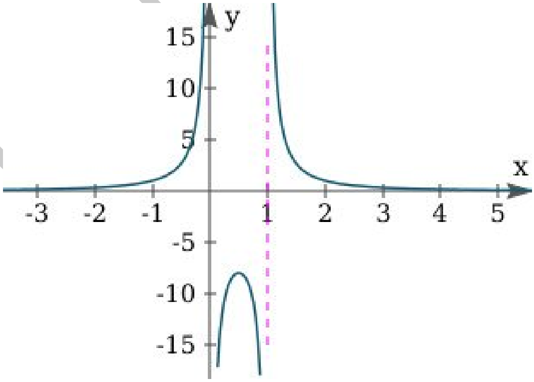
$$\lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^+} f(x) = 0,$$

de maneira que também tem-se

$$\lim_{x \to 10} f(x) = 0.$$

$\square$

Exemplo 3. *Em relação à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico se encontra esboçado na figura a seguir, pede-se calcular, se existirem, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.*



Solução. O gráfico esboçado nitidamente tem as retas $x = 0$ e $x = 1$ como assíntotas verticais. Contudo, conforme veremos a seguir, os comportamentos de $f(x)$ para $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$ são diferentes um do outro, o mesmo ocorrendo para $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$.

Quando $x \to 0^-$, temos $x < 0$ e x se aproxima de 0 cada vez mais. A porção correspondente do gráfico de f é uma curva situada no segundo quadrante do plano cartesiano, tal que o ponto $(x,f(x))$ se aproxima mais e mais da reta $x = 0$, *subindo* à medida que $x \to 0^-$. Assim,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty.$$

Para $x \to 0^+$, por outro lado, podemos nos restringir aos valores de x pertencentes ao intervalo $(0,1)$, fazendo x aproximar-se de 0 cada vez mais. A porção correspondente do gráfico de f é uma curva situada no terceiro quadrante do plano cartesiano, tal que o ponto $(x,f(x))$ se aproxima mais e mais da reta $x = 0$, *descendo* à medida que $x \to 0^+$. Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

A porção do gráfico de f de que trata o parágrafo anterior é a mesma que temos de examinar para analisar o que ocorre quando $x \to 1^-$. Isto porque devemos ter $x < 1$ mas x se aproximando de 1 e, portanto, podemos nos restringir a $x \in (0,1)$. Assim sendo, é imediato perceber que o ponto $(x,f(x))$ se aproxima mais e mais da reta $x = 1$, *descendo* à medida que $x \to 1^-$. Logo,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Por fim, o comportamento de $f(x)$ quando $x \to 1^+$ é bastante similar ao que ocorre com $f(x)$ quando $x \to 0^-$. Uma maneira simples de perceber isto é notar como as porções do gráfico de f correspondentes aos intervalos $(-\infty,0)$ e $(1,+\infty)$ são parecidas. De fato, pensando na reta $x = \frac{1}{2}$ (que não se encontra desenhada na figura) como um *espelho*, é sugestivo ver essas duas porções do gráfico de f como imagens uma da outra, por reflexão em torno dessa reta. Evidentemente, sem dispormos das expressões para $f(x)$ quando $x < 0$ e $x > 1$, não temos como ter garantia disso (pense, por exemplo, nas parábolas que representam os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{11x^2}{10}$; se tivermos apenas os esboços dessas parábolas, sem pontos marcados sobre elas, podemos muito bem achar que elas coincidem).

De todo modo, quando $x > 1$ o gráfico de f é uma curva situada no primeiro quadrante do plano cartesiano, tal que, à medida que $x \to 1^+$, o ponto $(x,f(x))$ correspondente se aproxima mais e mais da reta $x = 1$, subindo ao longo desse processo de aproximação. Portanto,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty.$$

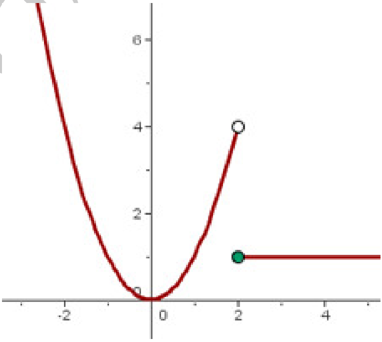
□

Exemplo 4. *Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \ se\ x < 2 \\ 1, \ se\ x \geq 2 \end{cases}.$$

Em seguida, baseando-se no esboço do gráfico, encontre os $a \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista.

Solução. A figura a seguir traz um esboço do gráfico de f.



Para entender o que está ocorrendo, note primeiramente que, se tivéssemos $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o gráfico correspondente seria uma parábola aberta para cima e com vértice no ponto $(0,0)$. Em nosso caso, não temos $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mas apenas para os reais $x < 2$. Portanto, a porção do gráfico de f correspondente a $x \in (-\infty,2)$ coincide com a porção da parábola $x \mapsto x^2$ até o ponto $(2,4)$, mas sem incluir esse ponto (uma vez que $f(x) = x^2$ para $x < 2$, e não $x \leq 2$).

Por outro lado, para $x \geq 2$ nos é dito que $f(x) = 1$ sempre. Isso se reflete no gráfico de f pelo fato de que ele é, para $x \geq 2$, a semirreta que começa no ponto $(2,1)$ e prossegue paralelamente ao eixo das abscissas, à medida que $x \to +\infty$.

Quanto à segunda parte do exemplo, consideremos separadamente os casos $a < 2$, $a > 2$ e $a = 2$.

i. Se $a < 2$, então $f(a) = a^2$ e o ponto $(a,f(a)) = (a,a^2)$ sobre o gráfico de f está situado sobre sua porção parabólica. Uma vez que tam porção não sofre interrupções quando x varia em $(-\infty,2)$, temos em particular que, quando $x \to a^-$, o ponto $(x,f(x)) = (x,x^2)$ se aproxima mais e mais do ponto $(a,f(a)) = (a,a^2)$. Da mesma forma, quando $x \to a^+$, o ponto $(x,f(x))$ se aproxima mais e mais do ponto $(a,f(a))$. Assim,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = a^2,$$

e $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe (e também vale a^2).

ii. Se $a > 2$, então $f(a) = 1$ e o ponto $(a,f(a)) = (a,1)$ sobre o gráfico de f está situado sobre sua porção retilínea. Uma vez que tam porção também não sofre interrupções quando x varia em $(2,\infty)$, temos em particular que, quando $x \to a^-$, o ponto $(x,f(x)) = (x,1)$ se aproxima mais e mais do ponto $(a,f(a)) = (a,1)$. Da mesma forma, quando $x \to a^+$, o ponto $(x,f(x))$ se aproxima mais e mais do ponto $(a,f(a))$. Assim,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = 1,$$

e $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (e também vale 1).

ii. Se $a = 2$ a situação é diferente. Nesse caso, quando $x \to 2^-$, temos em particular que o ponto $(x,f(x)) = (x,x^2)$ se aproxima mais e mais do ponto $(2,2^2) = (2,4)$. Por outro lado, quando $x \to 2^+$, o ponto $(x,f(x)) = (x,1)$ se aproxima mais e mais do ponto $(2,1)$. Então,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 \quad \text{mas} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1,$$

de sorte que $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe. $\square$

Exemplo 5. *Apresente evidências numéricas para a existência do limite*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-x-2}.$$

Em seguida, esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}$ *em seu domínio maximal de definição e justifique geometricamente a existência do limite.*

Solução. A fim de analisar o comportamento de $\dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}$ à medida que x se aproxima de 2, a primeira coisa que devemos nos lembrar é que não é importante o que ocorre quando $x = 2$, e sim quando x está próximo de 2, mas mantendo-se *diferente* de 2. Inclusive, perceba que $x^2 - 2x$ e $x^2 - x - 2$ se anulam quando $x = 2$, o que mostra que não podemos simplesmente substituir $x = 2$ na expressão do enunciado.

Contudo, o fato de que $x^2 - 2x$ e $x^2 - x - 2$ se anulam quando $x = 2$ nos dá uma pista sobre como proceder. Realmente, percebendo que $x^2 - 2x = x(x-2)$ e $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, podemos calcular

$$\frac{x^2-2x}{x^2-x-2} = \frac{x\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}} = \frac{x}{x+1}.$$

Portanto, queremos decidir se o limite

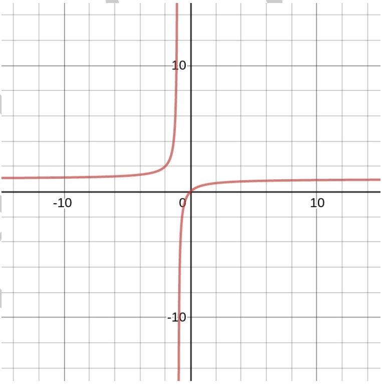
$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{x+1}$$

existe (e, se for o caso, calculá-lo).

Uma intuição simples é que, à medida que x se aproxima de 2, o denominador $x+1$ se aproxima de $2+1=3$, de forma que o quociente deve se aproximar de $\frac{2}{3}$. Essa percepção é corroborada pela tabela a seguir, que traz os valores numéricos da fração $\frac{x}{x+1}$, com quatro casas decimais corretas, quando x está próximo a 2, por falta e por excesso de 10^k, com k variando de 1 a 3 (compare-os com $\frac{2}{3} \cong 0{,}6666$ (também com quatro casas decimais corretas):

x	$\frac{x}{x+1}$
1,9	0,6552
2,1	0,6774
1,99	0,6656
2,01	0,6678
1,999	0,6665
2,001	0,6667

A figura a seguir esboça o gráfico de $x \mapsto \frac{x}{x+1}$:



Para justificá-la, observe inicialmente que

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Em seguida, veja que:

- O gráfico de $x \mapsto \frac{1}{x}$ é uma hipérbole situada no primeiro e terceiro quadrantes e tendo os eixos coordenados como assíntotas.

- Trocando x por $x+1$, transladamos o gráfico do item anterior de forma que as novas assíntotas sejam a reta $x=-1$ e o eixo das abscissas.

- Passando de $\frac{1}{x+1}$ para $-\frac{1}{x+1}$, refletimos o gráfico do item anterior ao longo do eixo das abscissas.

- Somando 1 a $-\frac{1}{x+1}$, subimos o gráfico do item anterior em 1 unidade.

O gráfico da função dada no enunciado coincide com o mostrado, exceto pelo ponto $\left(2, \frac{2}{3}\right)$, que pertence ao gráfico de $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ mas não ao de $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}$ (que não está definida para $x=2$). Assim, para obter o gráfico de f basta apagarmos o ponto $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ do gráfico acima.

Por fim, como

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x}{x+1},$$

e o gráfico de $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ não apresenta interrupção em torno do ponto $x=2$, concluímos que o limite em questão é realmente $\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$. □

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em dois encontros de 50 minutos cada, abordando os três primeiros exemplos no primeiro encontro e os dois últimos (juntamente com eventuais exemplos adicionais que o professor ache pertinente) no segundo encontro. Em cada caso, lembre-se de reservar um tempo para que os estudantes tentem responder as questões, ofertando pequenas sugestões à medida que perceber algum progresso.

Insista para que aqueles que apresentarem soluções corretas venham à lousa, expô-las aos colegas. Isso é algo que frequentemente faz com que os estudantes não se sintam à vontade, mas é excelente oportunidade para aprenderem a explicar suas ideias aos outros, trazendo benefícios para além da Matemática.

Mais exercícios relacionados a limites finitos e infinitos, laterais ou bilaterais, podem ser encontrados nas sugestões de leitura complementar a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. Coleção Profmat. Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2015.

2. G. B. Thomas, et. al. *Cálculo*, vol.1. Pearson, São Paulo, 2014.