Material Teórico - Módulo Resolução de Exercícios

Frações - Parte 1

Sexto Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

30 de maio de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, apresentamos exercícios variados sobre frações, números decimais e porcentagem.

Exemplo 1 (CMRJ). *O valor da expressão numérica*

$$\frac{1}{1+1}+\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}+\frac{\frac{1}{15}}{1+\frac{1}{15}}+\frac{\frac{1}{31}}{1+\frac{1}{31}}+\frac{\frac{1}{63}}{1+\frac{1}{63}}$$

é

(*a*) 1.

(*b*) $\frac{63}{64}$.

(*c*) $\frac{31}{32}$.

(*d*) $\frac{15}{16}$.

(*e*) $\frac{7}{8}$.

Solução. Temos:

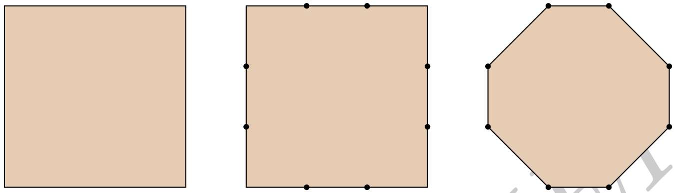
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+1}+\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}+\frac{\frac{1}{15}}{1+\frac{1}{15}}+\frac{\frac{1}{31}}{1+\frac{1}{31}}+\frac{\frac{1}{63}}{1+\frac{1}{63}}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{\frac{8}{7}}+\frac{\frac{1}{15}}{\frac{16}{15}}+\frac{\frac{1}{31}}{\frac{32}{31}}+\frac{\frac{1}{63}}{\frac{64}{63}}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{4}+\frac{1}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{7}}{8}+\frac{1}{\cancel{15}}\cdot\frac{\cancel{15}}{16}+\frac{1}{\cancel{31}}\cdot\frac{\cancel{31}}{32}+\frac{1}{\cancel{63}}\cdot\frac{\cancel{63}}{64}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\\
&=\frac{32+16+8+4+2+1}{64}\\
&=\frac{63}{64}.
\end{aligned}$$

Assim, a alternativa correta é a letra **(b)**. □

Exemplo 2 (Colégio Pedro II). *Um carpinteiro foi contratado para alterar o formato de uma mesa quadrada, aumentando o número de lados. Ele decidiu cortar o tampo da mesa, procedendo da seguinte forma:*

I. Marcou dois pontos em cada lado da mesa, dividindo-o em três partes iguais.

II. Serrou os quatro cantos da mesa, utilizando como referência as marcações feitas.



Que fração do tampo da mesa corresponde à área retirada?

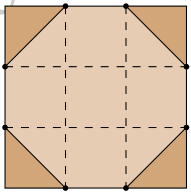
(a) $\frac{2}{9}$.

(b) $\frac{1}{3}$.

(c) $\frac{4}{9}$.

(d) $\frac{2}{3}$.

Solução. Na malha quadriculada abaixo, a parte do tampo da mesa que foi retirada corresponde à área mais escura.



Juntando os triângulos cortados de dois em dois, formamos dois quadradinhos iguais a cada um dos nove quadradinhos em que a mesa fica dividida pelas linhas tracejadas. Desse modo, a área do tampo que foi retirada corresponde à fração $\frac{2}{9}$ da mesa, e a alternativa correta é a letra **(a)**. $\square$

Exemplo 3 (OBMEP). *Na igualdade abaixo, a, b e c são números inteiros positivos. Qual é o valor de c?*

$$\frac{10}{7} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}$$

(a) 2.

(b) 3.

(c) 4.

(d) 5.

(e) 7.

Solução. Como

$$\begin{array}{r|l} 1\,0 & 7 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

temos

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}.$$

Procedendo da mesma forma com $\frac{7}{3}$, segue de

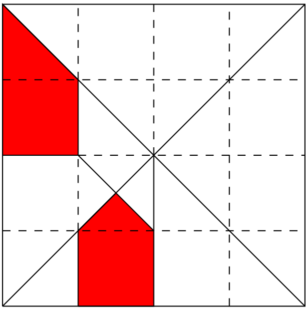
$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

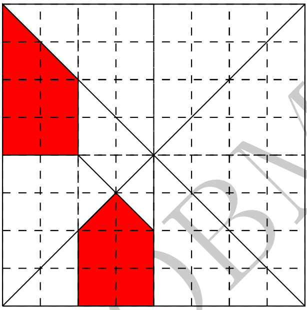
que

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}.$$

Portanto, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$. Assim, a alternativa correta é a letra **(e)**. □

Exemplo 4 (Banco OBMEP). *Na figura a seguir, todos os quadradinhos em que o tabuleiro foi dividido pelas linhas tracejadas são iguais. A região pintada de vermelho cobre que porcentagem do quadrado maior?*





Solução. Podemos refinar a malha quadriculada dividindo cada quadradinho em quatro outros, também todos iguais: Observando a última malha acima, contamos 9 quadradinhos e 4 triângulos. Como a soma das áreas de 2 triângulos é igual à área de 1 quadradinho e o tabuleiro ficou dividido em 64 quadradinhos, concluímos que a área pintada corresponde à fração $\frac{11}{64}$ do tabuleiro. $\square$

Exemplo 5. *No pátio de uma montadora há carros de cinco cores: preto, branco, vermelho, azul e prata. Metade dos carros são pretos e um quinto dos carros são brancos. De cada uma das outras três cores, há números iguais de carros. Sabendo-se que existem* 42 *carros vermelhos, quantos carros brancos há no pátio?*

Solução. Dos carros que se encontram no pátio da montadora, $\frac{1}{2}$ são pretos e $\frac{1}{5}$ são brancos. Assim, a fração que corresponde ao total de carros pretos ou brancos é

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}.$$

Desse modo, a fração que corresponde aos carros que não são pretos nem brancos é

$$\frac{10}{10}-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}.$$

Agora, como há quantidades iguais das outras três cores, a fração que corresponde à quantidade de carros de cada uma dessas cores é

$$\frac{3}{10}\div 3=\frac{\cancel{3}}{10}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}=\frac{1}{10}=\frac{1}{10}.$$

Como há 42 carros vermelhos, quantidade que corresponde a $\frac{1}{10}$ do total de carros no pátio da montadora, concluímos que o total de carros no pátio é $10\cdot 42=420$.

Uma vez que os carros brancos correspondem a $\frac{1}{5}$ do total de carros no pátio, concluímos que a quantidade de carros brancos é

$$\frac{1}{5}\cdot 420=84 \text{ carros.}$$

Outra maneira de calcular o total de carros brancos é lembrar que $\frac{1}{10}$ do total de carros corresponde a 42 carros e

$$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=2\cdot\frac{1}{10}.$$

Portanto, o total de carros brancos é o dobro do total de carros vermelhos, logo, é igual a $2\cdot 42=84$ carros. □

Exemplo 6 (ESA). *Um estudante gastou $\frac{1}{7}$ de seu salário com alimentação e $\frac{5}{6}$ do que sobrou com educação e outras despesas. Se ainda restaram* R\$286,34*, concluímos que seu salário é de:*

(*a*) R\$3006,20.

(*b*) R\$4004,16.

(*c*) R$2004,38.

(*d*) R$1736,40.

(*e*) R$2134,29.

Solução. Depois que o estudante gastou $\frac{1}{7}$ do seu salário com alimentação, ainda restaram $\frac{7}{7} - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ do salário. Como ele gastou $\frac{5}{6}$ desse resto com educação, concluímos que ele gastou $\frac{5}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{7} = \frac{5}{7}$ do salário total com educação. Desse modo, o total gasto com essas duas despesas foi de

$$\frac{1}{7} + \frac{5}{7} = \frac{6}{7}.$$

Depois de as descontarmos, ainda restou

$$\frac{7}{7} - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

do salário, o que corresponde a R$286,34. Portanto, o salário integral vale

$$7 \cdot 286{,}34 = 2004{,}38$$

reais. A alternativa correta é a letra **(c)**. □

Exemplo 7 (OBM). *Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco, o qual era composto de 20% de polpa de fruta e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é de polpa?*

Solução. Temos que $1\,\mathrm{L} = 1000\,\mathrm{mL}$ (1 litro corresponde a 1000 millilitros) e $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Assim no litro de suco temos $\frac{1}{5} \cdot 1000\,\mathrm{mL} = 200\,\mathrm{mL}$ de polpa.

Agora, uma vez que a mistura terá volume total de $4\,\mathrm{L} = 4000\,\mathrm{mL}$, concluímos que a fração que representa a quantidade de polpa nessa mistura é igual a

$$\frac{200}{4000} = \frac{200 \div 40}{4000 \div 40} = \frac{5}{100} = 5\%.$$

Portanto, a polpa de fruta corresponde a 5% do volume final. □

Exemplo 8 (CMRJ). *Por dois anos consecutivos, uma mercadoria teve seu preço aumentado anualmente em 5% em relação ao ano anterior. No fim desse período, a mercadoria foi oferecida em uma promoção, com 10% de desconto. É correto afirmar que seu preço inicial é:*

(*a*) *Menor que o preço final, mas maior que a metade dele.*

(*b*) *Maior que o preço final, mas menor que o dobro dele.*

(*c*) *Igual ao preço final.*

(*d*) *Menor que a metade do preço final.*

(*e*) *Maior que o dobro do preço final.*

Solução. O preço da mercadoria após o primeiro aumento de $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$ é igual ao produto do preço inicial por $1 + 0{,}05 = 1{,}05$; o preço da mercadoria após o segundo aumento de $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$ é igual ao produto do preço, após o primeiro aumento, por $1 + 0{,}05 = 1{,}05$. O preço final, após o desconto de desconto de $10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1$, corresponde ao produto do preço, após o segundo aumento, por $1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Assim, o preço final da mercadoria será igual ao preço inicial multiplicado por

$$1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot ,9 = 0{,}99225.$$

Desse modo, como $0{,}99225 < 1$, o preço final é menor que o preço inicial, ou seja, o preço inicial é maior que o preço final. Mais precisamente, o preço final corresponde a um desconto de $1 - 0{,}99225 = 0{,}00775 = 0{,}775\%$ sobre o preço inicial. Logo, a alternativa correta é a letra **(b)**. □

Ainda em relação ao exemplo anterior, para saber se o preço final é maior ou menor que o inicial, pode-se raciocinar da seguinte maneira: o problema pode ser resolvido do seguinte modo: os aumentos sucessivos de 5% foram aplicados sobre valores menores do que o valor sobre o qual foi aplicado o desconto de 10%. Por isso, o desconto de 10% representa um valor maior do que a soma dos dois aumentos de 5%. Logo, o preço final é menor que o preço inicial.

Exemplo 9 (CMRJ). *Durante o mês de abril, uma loja vendeu* 60 *computadores a* R\$1500,00 *cada um. No mês seguinte, a loja diminuiu em* 15% *o preço de cada computador e, com isso, houve um aumento de* 20% *nas vendas. Quanto a loja recebeu em maio a mais que em abril pelas vendas dos computadores?*

(*a*) R\$2500,00.

(*b*) R\$1800,00.

(*c*) R\$1700,00.

(*d*) R\$1400,00.

(*e*) R\$1100,00.

Solução. Com a redução de $15\% = 0{,}15$ no preço, cada computador foi vendido a

$$(1 - 0{,}15) \cdot 1500 = 0{,}85 \cdot 1500 = 1275 \text{ reais.}$$

Por outro lado, as vendas no mês de maio aumentaram $20\% = 0{,}2$ em relação a abril. Em abril foram vendidos 60 computadores, logo, em maio foram vendidos $(1+0{,}2)\cdot 60 = 1{,}2\cdot 60 = 72$ computadores. Assim, o total arrecadado com as vendas de computadores em maio foi $72 \cdot 1275 = 91800$ reais. Já em abril, o total arrecadado com as vendas de computadores foi $60 \cdot 1500 = 90000$ reais. Portanto, em maio, a loja recebeu $91800 - 90000 = 1800$ reais a mais em relação a abril. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

Antes de resolver cada problema, é recomendável fazer uma pequena revisão sobre os conteúdos abordados. No exemplo 8, é comum que os alunos pensem que o preço não foi alterado depois de dois aumentos de 5% seguidos de um desconto de 10%. Ressalte que tanto os aumentos quanto o desconto foram aplicados a valores diferentes, logo, não podem ser somados. Ao apresentar o exemplo 1, ressalte a importância de simplificar as frações para tornar os cálculos mais simples.