Material Teórico - Módulo Funções Trigonométricas

Cotangente, Cossecante e Secante
Parte 6

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de janeiro de 2025

Neste material, apresentaremos alguns problemas mais elaborados, cujas soluções ainda envolvem as identidades trigonométricas conhecidas como fórmulas de adição e transformação em produto, que foram deduzidas em aulas anteriores.

Exemplos

Exemplo 1 (IME). *Todos os arcos entre* 0 *e* 2π *que satisfazem a desigualdade*

$$\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

estão compreendidos entre

(a) $\frac{\pi}{12}$ *e* $\frac{\pi}{6}$

(b) $\frac{5\pi}{12}$ *e* $\frac{7\pi}{12}$

(c) $\frac{2\pi}{3}$ *e* $\frac{5\pi}{6}$

(d) $\frac{\pi}{3}$ *e* $\frac{\pi}{2}$

(e) $\frac{5\pi}{6}$ *e* $\frac{11\pi}{12}$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\iff & \operatorname{sen} x - \cos x > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\iff & \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
\iff & \operatorname{sen} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= \operatorname{sen} x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

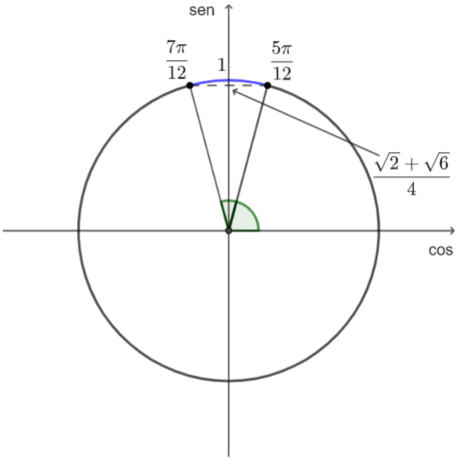
e que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right).\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}>\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\iff \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

Agora, observe o círculo trigonométrico abaixo.



Concluímos que, para x entre 0 e 2π, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\\
&\iff \frac{5\pi}{12} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{12}\\
&\iff \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\\
&\iff \frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Desse modo, a alternativa correta é a da letra (c). □

Exemplo 2 (FUVEST). *É dada a função $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$, para todo $x \in [0,\pi]$.*

(*a*) *Apresente três valores $x \in [0,\pi]$ para os quais $f(x) = 1$.*

(*b*) *Determine os valores $x \in [0,\pi]$ para os quais $f(x) = \frac{5}{8}$.*

(*c*) *Determine os valores $x \in [0,\pi]$ para os quais*

$$\frac{f(x)}{2} + \frac{3\operatorname{sen}(2x)}{8} \geq \frac{5}{8}.$$

Solução.

(a) Podemos escrever

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x\\
&= \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\\
&= \left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2\right)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\\
&= 1^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\\
&= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$, o que implica $\operatorname{sen}^2(2x) = 4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$. Daí, segue que

$$2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{2}.$$

Portanto, obtemos

$$f(x) = 1 - \frac{\text{sen}^2(2x)}{2}.$$

Para encontrar valores $x \in [0,\pi]$ para os quais $f(x) = 1$, fazemos

$$1 = f(x) = 1 - \frac{\text{sen}^2(2x)}{2},$$

donde obtemos

$$\text{sen}^2(2x) = 0.$$

Mas $x \in [0,\pi]$ se, e somente se, $2x \in [0,2\pi]$. Portanto, $\text{sen}(2x) = 0$ se, e somente se, $2x = 0$, $2x = \pi$ ou $2x = 2\pi$, ou seja, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \pi$. Esses são os três valores de $x \in [0,\pi]$ para os quais $f(x) = 1$.

(b) Repetindo a ideia do item anterior, desejamos encontrar valores de $x \in [0,\pi]$ para os quais $f(x) = \frac{5}{8}$, isto é,

$$\frac{5}{8} = f(x) = 1 - \frac{\text{sen}^2(2x)}{2}.$$

Logo,

$$\text{sen}^2(2x) = \frac{3}{4},$$

ou seja,

$$\text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \text{sen}(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mas $x \in [0,\pi]$ se, e somente se, $2x \in [0,2\pi]$. Portanto, $\text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se, e somente se, $2x = \frac{\pi}{3}$ ou $2x = \frac{2\pi}{3}$ e $\text{sen}(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ se, e somente se, $2x = \frac{4\pi}{3}$ ou $2x = \frac{5\pi}{3}$. Portanto, $f(x) = \frac{5}{8}$ se, e somente se, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

(c) Observe que

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x)}{2} + \frac{3\,\mathrm{sen}(2x)}{8} \geq \frac{5}{8} \\
\iff &\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{sen}^2(2x)}{4} + \frac{3\,\mathrm{sen}(2x)}{8} \geq \frac{5}{8} \\
\iff &-\frac{\mathrm{sen}^2(2x)}{4} + \frac{3\,\mathrm{sen}(2x)}{8} - \frac{1}{8} \geq 0 \\
\iff &2\,\mathrm{sen}^2(2x) - 3\,\mathrm{sen}(2x) + 1 \leq 0.
\end{aligned}$$

Fazendo $y = \mathrm{sen}(2x)$, temos que

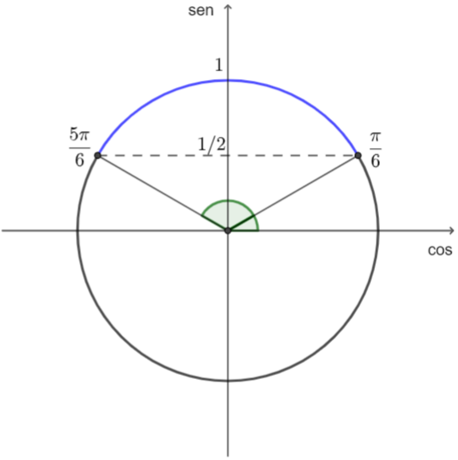
$$\frac{f(x)}{2} + \frac{3\,\mathrm{sen}(2x)}{8} \geq \frac{5}{8} \iff 2y^2 - 3y + 1 \leq 0.$$

Mas o conjunto verdade da inequação $2y^2 - 3y + 1 \leq 0$ em $\mathbb{R}$ é o intervalo $[1/2{,}1]$. Portanto, procuramos os números reais $x \in [0{,}\pi]$, tais que $\dfrac{1}{2} \leq \mathrm{sen}(2x) \leq 1$. Observando com atenção o círculo trigonométrico abaixo, percebemos que os valores de $x \in [0{,}\pi]$ para os quais $\dfrac{1}{2} \leq \mathrm{sen}(2x) \leq 1$ são precisamente os valores de x tais que

$$\frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} \iff \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}.$$

Portanto, concluímos que, se $x \in [0{,}\pi]$, então

$$\frac{f(x)}{2} + \frac{3\,\mathrm{sen}(2x)}{8} \geq \frac{5}{8} \iff x \in [\pi/12{,}5\pi/12].$$



□

Exemplo 3 (ITA). *Sabendo que* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -2$ *e que* $\operatorname{sen}\alpha = (4-\sqrt{5})\operatorname{sen}(\beta)$, *em que* $\alpha,\beta \in (0,\pi/2)$, *calcule*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\ \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\ \ e\ \ \frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Solução. Vamos utilizar a fórmula $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ para $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned}-2 = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ &= \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\end{aligned}$$

Fazendo $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, temos que $y > 0$, uma vez que

$0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$. Além disso, temos que

$$-2 = \frac{2y}{1-y^2} \Longleftrightarrow 2y^2 - 2y - 2 = 0.$$

Resolvendo essa equação do segundo grau em y e impondo a condição $y > 0$, obtemos

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Para calcular $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, utilizaremos as fórmulas $\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cos q}$ e $\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cos q}$. Com efeito, fazendo $p = \frac{\alpha+\beta}{2}$ e $q = \frac{\alpha-\beta}{2}$, obtemos $p+q = \alpha$, $p-q = \beta$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}{\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \\
&= 4 - \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Fazendo $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ e $z = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, a última equação acima nos dá

$$\begin{aligned}
\frac{y+z}{y-z} = 4 - \sqrt{5} &\Longleftrightarrow y + z = (4-\sqrt{5})y - (4-\sqrt{5})z \\
&\Longleftrightarrow (5-\sqrt{5})z = (3-\sqrt{5})y \\
&\Longleftrightarrow z = \frac{(3-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2(5-\sqrt{5})} \\
&\Longleftrightarrow z = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2(5-\sqrt{5})} \\
&\Longleftrightarrow z = \frac{\sqrt{5}-1}{5-\sqrt{5}} \\
&\Longleftrightarrow z = \frac{\sqrt{5}}{5},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=z=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Finalmente, dividindo z por y, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} &= \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}\\ &= \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{5\cdot 4}\\ &= \frac{5-\sqrt{5}}{10}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 4 (ITA). *Sejam $A=\cos\alpha+\cos\beta$ e $B=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Calcule $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ em função de A e B, sabendo que A e B são não nulos.*

Solução. Sendo $A=\cos\alpha+\cos\beta$ e $B=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta$, temos

$$\begin{aligned}AB &= (\cos\alpha+\cos\beta)(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)\\ &= \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\ &\quad+\cos\beta\operatorname{sen}\alpha-\cos\beta\operatorname{sen}\beta\\ &= \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}-\frac{2\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{2}\\ &\quad+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\ &= \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{2}+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\\ &= \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)-\operatorname{sen}(2\beta)}{2}+\operatorname{sen}(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando a fórmula de transformação em produto

$$\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q=2\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\alpha)-\operatorname{sen}(2\beta) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha-2\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+2\beta}{2}\right)\\ &= 2\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}AB &= \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)-\operatorname{sen}(2\beta)}{2}+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\\ &= \frac{2\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{2}+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\\ &= \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\\ &= \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\left[\cos(\alpha+\beta)+1\right].\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}A^2+B^2 &= (\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2\\ &= \cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\\ &\quad+\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}^2\beta\\ &= \cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta\\ &\quad+2\cos\alpha\cos\beta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ &= 1+1+2(\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\\ &= 2+2\cos(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{A^2+B^2-2}{2}.$$

Daí, segue que

$$1+\cos(\alpha+\beta)=1+\frac{A^2+B^2-2}{2}=\frac{A^2+B^2}{2}.$$

Portanto,

$$AB=\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cdot\frac{A^2+B^2}{2}.$$

Agora, como A e B são ambos não nulos, temos que $A^2 + B^2$ também o é. Assim, obtemos

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{2AB}{A^2 + B^2}.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Antes de apresentar os exemplos, recomendamos que o professor faça uma revisão sobre as fórmulas de adição e transformação em produto. Também recomendamos que alguns exemplos mais simples sejam apresentados antes de explorar os exemplos deste material. Por fim, reforçamos a recomendação de que os alunos reservem um tempo para pensar nos problemas antes que sejam apresentadas soluções para os mesmos.

Sugestões de Leitura Complementar

1 A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2022.

2 A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2022.

3 G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*, nona edição. São Paulo, Atual Editora, 2013.