Material Teórico - Módulo Trigonometria II

Cosseno e seno da soma

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de agosto de 2022

Portal da Matemática
OBMEP

1 O seno do soma

Muitas vezes queremos usar um valor conhecido para o seno (ou cosseno) de alguns ângulos para calcular o seno (ou cosseno) de outros ângulos. Por exemplo, já conhecemos os valores dos senos e cossenos de $30°$, $45°$ e $60°$ (entre outros). Mas ainda não aprendemos quanto vale $\operatorname{sen}(75°)$, por exemplo. Uma maneira de calcular $\operatorname{sen}(75°)$ é observando que $75 = 30 + 45$. Mas para isso, precisamos de uma maneira de relacionar $\operatorname{sen}(30° + 45°)$ com os valores já conhecidos (o mesmo vale para $\cos(75°)$). Para isso, utilizamos a famosa fórmula do seno da soma de dois arcos:

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) + \operatorname{sen}(B)\cos(A). \tag{1}$$

Observação 1. *É folclórico memorizar a equação acima lembrando da canção: "Minha terra tem palmeiras onde canta o sabiá, seno de A cosseno de B, seno de B cosseno de A".*

Logo mais, iremos dar uma demonstração do porque esta fórmula vale no caso em que A e B estão entre 0 e 90 graus. Vale ressaltar que a fórmula em si vale para quaisquer valores de A e B, inclusive valores negativos ou maiores que $90°$ (ou mesmo maiores que $360°$). Contudo não faremos a demonstração geral por se tratar de uma análise de casos tediosa. Enquanto que na nossa demonstração usaremos uma construção em que A e B são ângulos de certos triângulos retângulos.

Antes disso, vejamos um exemplo de como a fórmula é útil.

Exemplo 2. *Calcule o valor de* $\operatorname{sen}(75°)$.

Solução. Como $75 = 30 + 45$, usando a fórmula para o seno da soma de dois arcos com $A = 30$ e $B = 45$, obtemos:

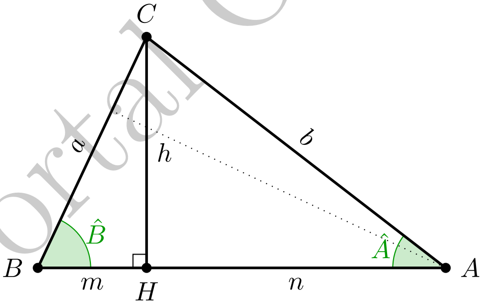
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(30+45) &= \operatorname{sen}(30)\cos(45) + \operatorname{sen}(45)\cos(30)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

$\square$

Vamos agora demonstrar a fórmula do seno da soma de dois arcos, no caso em que $0 < A < 90°$ e $0 < B < 90°$.

Construa um triângulo ABC, como na figura abaixo. Sejam $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ os comprimentos dos lados. Por simplicidade, chamaremos de A, B, C também às medidas dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ respectivamente. É claro que $\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B})$. E como para todo x temos que $\operatorname{sen}(180 - x) = \operatorname{sen} x$, segue que

$$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen}(A + B).$$



Vamos calcular a área do triângulo ABC de duas maneiras. Por uma lado a área é dada pela fórmula

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}(C).$$

(essa fórmula é uma consequência direta do fato de que a altura relativa ao lado BC tem medida $b\operatorname{sen}(B)$; e a área do triângulo é igual a metade do produto de uma base pela altura relativa a esta base).

Por outro lado, tal área pode ser obtida somando-se as áreas dos triângulos BHC e AHC. Assim,

$$\frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}(C) = \frac{mh}{2} + \frac{nh}{2},$$

ou simplesmente

$$ab\,\mathrm{sen}(C) = mh + nh,$$

Ainda observando os triângulos BHC e AHC temos

$$m = a\cos B \qquad\qquad n = b\cos A.$$

Substituindo isto na equação anterior, temos:

$$ab\,\mathrm{sen}(C) = a\cos(B)\cdot h + b\cos(A)\cdot h.$$

Dividindo ambos os lados por ab, temos

$$\mathrm{sen}(C) = \cos(B)\frac{h}{b} + \cos(A)\cdot\frac{h}{a}.$$

Olhando mais uma vez para os triângulos BHC e AHC observe que

$$\mathrm{sen}(A) = \frac{h}{b} \qquad\qquad \mathrm{sen}(B) = \frac{h}{a}.$$

Logo,

$$\mathrm{sen}(C) = \cos(B)\,\mathrm{sen}(A) + \cos(A)\,\mathrm{sen}(B).$$

Por fim, usando que $\mathrm{sen}(C) = \mathrm{sen}(A+B)$ e reordenando os fatores de cada produto, obtemos a expressão desejada.

Um caso que vale à pena ser destacado é quando $A = B$.

$$\mathrm{sen}(A+A) = \mathrm{sen}(A)\cos(A) + \mathrm{sen}(A)\cos(A).$$

Neste caso, a fórmula pode ser simplificada para o que chamamos de fórmula do **seno do arco duplo**:

$$\boxed{\mathrm{sen}(2A) = 2\,\mathrm{sen}(A)\cos(A).} \tag{2}$$

2 O seno da diferença

Todas as demais fórmulas deste material são consequência da fórmula para o seno da soma.

Vamos começar, deduzindo dela uma fórmula para o seno da diferença de dois arcos. Queremos mostrar o seguinte.

$$\boxed{\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(B)\cos(A).} \tag{3}$$

Para ver que isso é verdade basta escrever a diferença $a - b$ como $a + (-b)$. Daí, podemos aplicar a fórmula para o seno de uma soma:

$$\operatorname{sen}(A + (-B)) = \operatorname{sen}(A)\cos(-B) + \operatorname{sen}(-B)\cos(A).$$

Agora, basta lembrar que $\cos(-B) = \cos(B)$ e $\operatorname{sen}(-B) = -\operatorname{sen}(B)$ (como se pode verificar no círculo trigonométrico). Substituindo esses valores na expressão anterior, obtemos

$$\operatorname{sen}(A + (-B)) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) + \operatorname{sen}(B)\,(-\cos(A)),$$

que é equivalente à fórmula que queríamos demonstrar.

3 O cosseno da soma

A fim de obter uma expressão para $\cos(A + B)$ vamos usar que para qualquer x vale que $\cos(x) = \operatorname{sen}(90 - x)$.

Dessa forma,

$$\cos(A + B) = \operatorname{sen}(90 - (A + B)) = \operatorname{sen}((90 - A) - B).$$

Em seguida, aplicamos a fórmula para o seno da diferença. Assim,

$$\cos(A + B) = \operatorname{sen}(90 - A)\cos(B) - \operatorname{sen}(B)\cos(90 - A).$$

Por fim, basta usar que $\operatorname{sen}(90 - A) = \cos(B)$ e $\cos(90 - A) = \operatorname{sen}(B)$, para obter a famosa expressão:

$$\boxed{\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(A).} \tag{4}$$

4 O cosseno da diferença

O mesmo artifício usado para o seno da diferença nos permite mostrar que:

$$\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + \operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(A). \tag{5}$$

De fato, pela fórmula do cosseno da soma temos que:

$$\cos(A + (-B)) = \cos A \cos(-B) - \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(-B).$$

E para concluir, basta usar que $\cos(-B) = \cos(B)$ e $\operatorname{sen}(-B) = -\operatorname{sen}(B)$.

Observação 3. *Há duas diferenças cruciais entre as fórmulas para o seno e para o cosseno da soma/subtração de arcos. A primeira é que na expansão do* $\operatorname{sen}(A + B)$ *o sinal de soma é preservado pois somamos* $\operatorname{sen}(A)\cos(B)$ *com* $\operatorname{sen}(B)\cos(A)$*; na expansão de* $\operatorname{sen}(A - B)$ *o sinal de subtração também é preservado. Por outro lado, nas expansões de* $\cos(A + B)$ *e* $\cos(A - B)$ *os sinal de soma/subtração são invertidos.*

O segundo ponto que chama atenção é que nas fórmulas para $\operatorname{sen}(A + B)$ *e para* $\operatorname{sen}(A - B)$*, o seno e o cosseno se alternam (o seno de* A *é multiplicado pelo cosseno de* B*, e vice-versa), enquanto que nas fórmulas para* $\operatorname{sen}(A + B)$ *e para* $\operatorname{sen}(A - B)$ *os cossenos aparecem juntos (cosseno de* A *multiplica cosseno de* B*) e os senos aparecem juntos (seno de* A *multiplica seno de* B*).*

5 Tangente da soma

Para obter a expressão de $\operatorname{tg}(A + B)$, simplesmente usamos que

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{sen}(A + B)}{\cos(A + B)},$$

aplicamos as fórmulas para o seno e o cosseno das somas e simplificamos o resultado:

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{sen}(A)\cos(B) + \operatorname{sen}(B)\cos(A)}{\cos(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(A)},$$

Dividindo o numerado e o denominador por $\cos(A)\cos(B)$ obtemos:

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\frac{\operatorname{sen}(A)\cos(B)}{\cos(A)\cos(B)} + \frac{\operatorname{sen}(B)\cos(A)}{\cos(A)\cos(B)}}{\frac{\cos(A)\cos(B)}{\cos(A)\cos(B)} - \frac{\operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(A)}{\cos(A)\cos(B)}}.$$

Logo,

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - (\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B)}$$

6 Exercícios

Exemplo 4. *Calcule os valores de* $\operatorname{sen}(\pi/12)$, $\cos(\pi/12)$ *e* $\operatorname{tg}(\pi/12)$

Solução. Observe que

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos calcular o cosseno:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Poderíamos calcular $\text{tg}(\pi/12)$ fazendo $\text{sen}(\pi/12)/\cos(\pi/12)$. Mas para treinar, vamos usar a fórmula da tangente da soma de dois arcos:

$$\begin{aligned}\text{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\end{aligned}$$

A expressão acima pode ser simplificada racionalizando o denominador. Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{3}-1$.

$$\begin{aligned}\text{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{2}\\ &= 2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 5. *Calcule o valor de* $\cos^4(\frac{\pi}{24})-\text{sen}^4(\frac{\pi}{24})$.

Solução. Seja $x=\cos(\frac{\pi}{24})$ e $y=\text{sen}(\frac{\pi}{24})$. Queremos calcular o valor de x^4-y^4. Podemos fatorar essa expressão como:

$$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2).$$

Pela relação fundamental, temos que $x^2+y^2=1$. Assim, basta calcular x^2-y^2, ou seja, a valor pedido é igual a:

$$\cos^2(\frac{\pi}{24})-\text{sen}^2(\frac{\pi}{24}).$$

Mas veja que isso é igual a $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ que já calculamos no exemplo 4. Logo, o valor desejado é $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. □

Exemplo 6. *Calcule o valor de* $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$

Solução. Vamos multiplicar e dividir a expressão do enunciado por $2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)$ a fim de obter:

$$\frac{(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ) \cdot 2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}$$

que é igual a

$$\frac{2(\cos^2 36^\circ - \cos^2 72^\circ)}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} \tag{6}$$

Agora, vamos usar que para qualquer α vale que

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)\\ &= \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha))\\ &= -1 + 2\cos^2(\alpha).\end{aligned}$$

Isso nos dá a fórmula

$$\boxed{\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.} \tag{7}$$

Usando essa fórmula para $\alpha = 36$ e depois para $\alpha = 72$ e substituindo na equação (6) obtemos:

$$\frac{(1 + \cos 72^\circ) - (1 + \cos 144^\circ)}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}$$

que é igual a

$$\frac{\cos 72^\circ - \cos 144^\circ}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}$$

Acontece que $36 + 144 = 180$. Logo, $\cos 144^\circ = -\cos 36^\circ$. Substituindo na expressão anterior e simplificando obtemos a resposta: $\frac{1}{2}$. □

Exemplo 7. *Calcule o valor de* $X = \operatorname{sen} 10^\circ \cdot \operatorname{sen} 50^\circ \cdot \operatorname{sen} 70^\circ$

Solução. Vamos fazer uso da fórmula

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$$

várias vezes para simplificar a expressão do enunciado. Primeiro, multiplicando e dividindo a expressão do enunciado por cos(10) (de modo a não alterar seu valor) obtemos.

$$\begin{aligned} X &= \frac{2\cdot\operatorname{sen}10^\circ\cdot\cos 10^\circ\cdot\operatorname{sen}50^\circ\cdot\operatorname{sen}70^\circ}{2\cos 10^\circ} \\ &= \frac{\operatorname{sen}20^\circ\cdot\operatorname{sen}50^\circ\cdot\operatorname{sen}70^\circ}{2\cos(10)} \end{aligned}$$

Agora veja que $\operatorname{sen}70^\circ = \cos 20^\circ$. Logo,

$$X = \frac{\operatorname{sen}20^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\operatorname{sen}50^\circ}{2\cos(10)} = \frac{\operatorname{sen}40^\circ\cdot\operatorname{sen}50^\circ}{4\cos 10^\circ}.$$

Da mesma forma, observamos que $\operatorname{sen}50^\circ = \cos 40^\circ$. Logo,

$$X = \frac{\operatorname{sen}40^\circ\cdot\cos 40^\circ}{4\cdot\cos 10^\circ} = \frac{\operatorname{sen}80^\circ}{8\cdot\cos 10^\circ} = \frac{1}{8},$$

onde a última igualdade é válida pois $\operatorname{sen}80^\circ = \cos 10^\circ$. Assim, a resposta deste problema é 1/8. □

Exemplo 8. *Calcule o valor da expressão*

$$\sqrt{\operatorname{sen}^4 15^\circ + 4\cos^2 15^\circ} - \sqrt{\cos^4 15^\circ + 4\operatorname{sen}^2 15^\circ}.$$

Solução. Poderíamos simplesmente calcular os valores de $\operatorname{sen}15^\circ$ e $\cos 15^\circ$ e substituir esses valores na expressão do enunciado. Porém, vamos adiar substituições numéricas e tentar primeiro simplificar a expressão original a fim de fazer menos contas. Seja

$$A = \sqrt{\operatorname{sen}^4\alpha + 4\cos^2\alpha} - \sqrt{\cos^4\alpha + 4\operatorname{sen}^2\alpha},$$

para um ângulo α qualquer.

Dentro do primeiro radical, vamos usar a relação fundamental para substituir $\cos^2\alpha$ por $1-\operatorname{sen}^2\alpha$. E no segundo radical vamos substituir $\operatorname{sen}^2\alpha$ por $1-\cos^2\alpha$. Assim,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\operatorname{sen}^4\alpha + 4(1-\operatorname{sen}^2\alpha)} - \sqrt{\cos^2\alpha + 4(1-\cos^2\alpha)} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^4\alpha - 4\operatorname{sen}^2\alpha + 4} - \sqrt{\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 4} \\ &= \sqrt{(\operatorname{sen}^2\alpha - 2)^2} - \sqrt{(\cos^2\alpha - 2)^2} \\ &= |\operatorname{sen}^2\alpha - 2| - |\cos^2\alpha - 2| \end{aligned}$$

Observe que no passo acima, precisamos tomar o cuidado de que $\sqrt{k^2}$ é igual ao valor absoluto de k e não necessariamente igual a k. Acontece que $\operatorname{sen}^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$ estão entre 0 e 1, logo tanto $\operatorname{sen}^2\alpha-2$ como $\cos^2\alpha-2$. Logo,

$$|\operatorname{sen}^2\alpha - 2| = 2-\operatorname{sen}^2\alpha |\cos^2\alpha - 2| = 2-\cos^2\alpha.$$

Com isso, concluímos que:

$$A = (2-\operatorname{sen}^2\alpha) - (2-\cos^2\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = \cos(2\alpha).$$

Agora sim, fazendo $\alpha = 15^\circ$, obtemos que:

$$A = \cos(2\cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\square$

Exemplo 9. *Encontre os possíveis valores de x tais que $0 \le x \le 360^\circ$ e*

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\operatorname{sen} x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}.$$

Solução. No início desta aula calculamos o valor de $\operatorname{sen}(75^\circ)$. Veja que $\cos(15) = \operatorname{sen} 75$, pois $15+75=90$. (Alternativamente, poderíamos escrever $15 = 45-30$ e calcular $\cos 15^\circ$ usando a fórmula do cosseno da diferença de arcos). Assim,

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Usando que $\sqrt{6} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ e colocando $\sqrt{2}/4$ em evidência, podemos reescrever isso na forma:

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

Do mesmo modo, podemos facilmente calcular:

$$\operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

Assim, a equação do enunciado equivale a:

$$\frac{4 \operatorname{sen} 15°}{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} x} + \frac{4 \cos 15°}{\sqrt{2} \cdot \cos x} = 4\sqrt{2}.$$

Ou seja,

$$\frac{\operatorname{sen} 15°}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos 15°}{\cos x} = 2.$$

Multiplicando ambos os lados por $\operatorname{sen} x \cos x$, obtemos:

$$\operatorname{sen} 15° \cos x + \operatorname{sen} x \cos 15° = 2 \operatorname{sen} x \cos x,$$

logo

$$\operatorname{sen}(15 + x) = \operatorname{sen}(2x).$$

Observando o círculo trigonométrica, temos que a igualdade entre dois senos, digamos $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$ (escritos em graus) ocorre apenas quando $\beta = \alpha + 360k$ ou $\beta = (180 - \alpha) + 360k$, para algum inteiro k.

Assim, há dois casos:

$$2x = 15 + x + 360k \text{ou} 2x = (165 - x) + 360k.$$

No primeiro caso,

$$2x = 15 + x + 360k \implies x = 15 + 360k.$$

Como queremos que $0 < x < 360$, a única possibilidade é que $k = 0$. Logo $x = 15°$ é um solução. No segundo caso,

$$2x = 165 - x + 360k \implies 3x = 165 + 360k \implies x = 55 + 120k.$$

E para que $0 < x < 360$, precisamos que $0 < 55 + 120k < 360$, o que é verdade quando $k \in 0, 1, 2$. Logo, $x \in \{55, 175, 295\}$.

Fazendo as união dos dois casos, o cojunto solução da equação do enunciado é:

$$\{15^\circ, 55^\circ, 175^\circ, 295^\circ\}.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja abordado em dois encontros de 50 minutos.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.