

# Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 1 - Fundamentos

## Poliedros - parte 2

### Terceiro Ano do Ensino Médio

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**

**Revisor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto**



# 1 O Teorema de Euler para poliedros convexos

Na primeira parte desta aula enunciamos e aplicamos o seguinte resultado:

**Teorema 1** (L. Euler, 1752). *Em um poliedro simplesmente conexo com  $F$  faces,  $A$  arestas e  $V$  vértices, vale a relação*

$$V - A + F = 2.$$

Nesta seção apresentaremos uma demonstração do resultado mais fraco a seguir:

**Teorema 2** (de Euler para poliedros convexos). *Em um poliedro convexo com  $F$  faces,  $A$  arestas e  $V$  vértices, vale a relação*

$$V - A + F = 2.$$

Este último resultado é de fato mais fraco do que o primeiro, pois, como vimos na primeira parte, existem poliedros simplesmente conexos que não são convexos (veja o Exemplo 2 da parte 1).

A demonstração que exibiremos aqui é a que aparece na sugestão de leitura complementar [5]. Ela tem a vantagem de usar apenas ferramentas que já desenvolvemos na aula *Pontos, retas e planos*. Na referência [4] encontra-se uma análise crítica da demonstração exibida em [6]. Para outras demonstrações do Teorema 2, consulte [1] ou [3]. Veja, ainda, a Observação 4 na página 3.

**Prova do Teorema 2.** Seja  $P$  um poliedro convexo com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces.

Tomemos uma reta  $\ell$  que não seja paralela a plano algum que contenha uma face de  $P$ . Isso é possível porque o poliedro tem um número finito de faces e há uma infinidade de escolhas para a direção da reta  $\ell$ . Seja  $\alpha$  um plano perpendicular a  $\ell$  e tal que  $\alpha \cap P = \emptyset$ .

Seja  $R$  a região do espaço delimitada pelo poliedro  $P$ , incluídos os pontos de  $P$ . Para cada ponto  $A$  de  $R$ , vamos denotar por  $A'$  a projeção ortogonal de  $A$  sobre o plano  $\alpha$ , isto é,  $A'$  é o ponto de interseção de  $\alpha$  com a reta  $t$ , paralela a  $\ell$  e que passa por  $A$ . (Veja a figura 1.)

Como  $P$  é um poliedro convexo, a interseção de uma reta  $t$ , paralela a  $\ell$ , com a região  $R$  é um conjunto vazio, um conjunto unitário ou um segmento de reta. Dessa forma,  $P \cap t$  tem 0, 1 ou 2 pontos. A figura 1 ilustra as três situações possíveis: as retas  $t_0, t_1$  e  $t_2$  são paralelas à reta  $\ell$ , sendo que  $t_0 \cap R = \emptyset$ ,  $t_1 \cap R = \{A\}$  e  $t_2 \cap R$  é o segmento de reta  $BC$ . O ponto de interseção da reta  $t_0$  com o plano  $\alpha$  não é projeção de um ponto de  $R$ . O ponto  $A'$ , interseção de  $t_1$  com o plano  $\alpha$ , é a projeção do ponto  $A$ ; finalmente, a projeção de qualquer ponto do segmento  $BC$  sobre o plano  $\alpha$  coincide com as projeções de  $B$  e de  $C$ , pontos de  $P$  que são as extremidades do segmento  $BC$ .

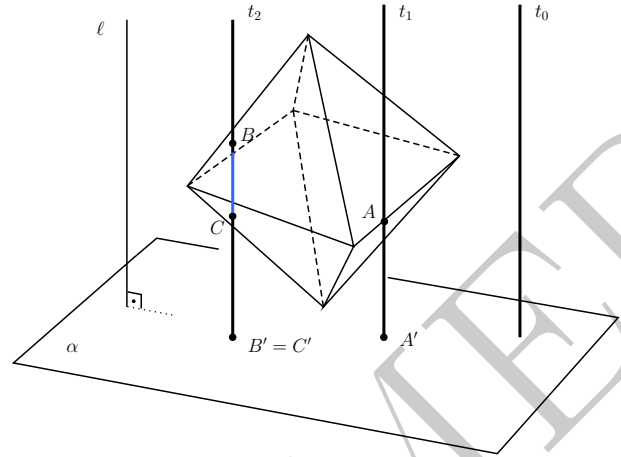


Figura 1: projeção ortogonal de pontos do poliedro  $P$  sobre o plano  $\alpha$ .

De posse da discussão acima, seja

$$P' = \{A' \in \alpha \mid A' \text{ é projeção de pelo menos um ponto de } P\}.$$

A figura plana  $P' \subset \alpha$  pode ser decomposta como  $P' = P'_0 \cup \Gamma'$ , onde  $P'_0$  é o conjunto dos pontos de  $P'$  que são projeções de *exatamente* dois pontos de  $P$  e  $\Gamma'$  é o conjunto dos pontos de  $P'$  que são projeções de *exatamente* um ponto de  $P$ . (Veja a figura 2.)

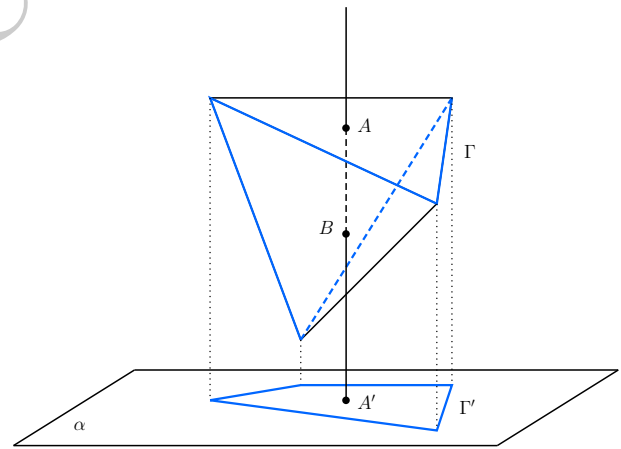


Figura 2: o contorno aparente  $\Gamma$  de  $P$  e sua projeção  $\Gamma'$  em  $\alpha$ . Um ponto iluminado  $A$  e um ponto sombrio  $B$ , projetados sobre  $\alpha$  ambos em  $A'$ .

Um ponto de  $P'$  que é projeção de exatamente um ponto de  $P$  é necessariamente um ponto de uma aresta de  $P$ . Esses pontos formam um conjunto  $\Gamma \subset P$ , denominado de **contorno aparente** de  $P$ , cuja projeção é  $\Gamma'$  (veja novamente a figura 2). Como a projeção ortogonal de um

segmento de reta é um segmento de reta (possivelmente degenerado em um ponto), a projeção  $\Gamma'$  do contorno aparente é um polígono plano. A região do plano  $\alpha$  delimitada por  $\Gamma'$ , incluindo os pontos de  $\Gamma'$ , é a projeção  $P'$  do poliedro  $P$  sobre o plano  $\alpha$ .

Se  $A$  e  $B$  são pontos de  $P$  projetados ambos sobre o ponto  $A'$  de  $\alpha$ , com  $A$  mais distante de  $\alpha$  do que  $B$ , chamamos  $A$  de **ponto iluminado** e  $B$  de **ponto sombrio** (uma vez mais, veja a figura 2). Essa nomenclatura remete à imagem do sólido  $R$  sendo iluminado por raios de luz paralelos, representados pelas retas paralelas a  $\ell$ , e projetando uma sombra (o conjunto  $P'_0$ ) sobre o solo, representado pelo plano  $\alpha$ .

Dessa forma, o poliedro  $P$  pode ser visto como a união disjunta de três conjuntos de pontos: o conjunto  $I$  dos pontos iluminados, o conjunto  $S$  dos pontos sombios e o contorno aparente (veja a figura 3):

$$P = I \cup S \cup \Gamma.$$

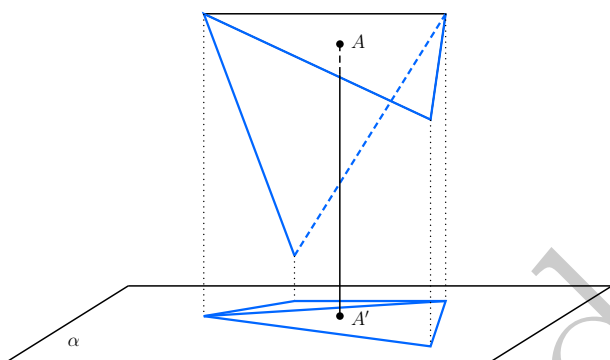


Figura 3: o conjunto  $I$  dos pontos iluminados de  $P$ , o contorno aparente  $\Gamma$  e suas projeções sobre  $\alpha$ .

Ignorando os pontos pertencentes a  $S$ , temos uma correspondência *biunívoca* entre os pontos iluminados e do contorno aparente de  $P$  com suas projeções, ou seja, para cada ponto  $A$  de  $I \cup \Gamma$ , existe um único ponto  $A'$  em  $\alpha$  que é a projeção ortogonal de  $A$ .

Se cada face do poliedro  $P$  for dividida em triângulos e cada novo triângulo for considerado como uma face, sendo cada um de seus lados considerado como um aresta, o valor total de  $V - A + F$  não se altera, pois  $V$  permanece o mesmo, enquanto  $A$  e  $F$  sofrem a mesma alteração (verifique essa afirmação!).

Dessa maneira, não há perda de generalidade se supusermos que todas as faces do poliedro  $P$  são triângulos. Neste caso, cada face de  $P$  tem três arestas e cada aresta é compartilhada por duas faces, de forma que

$$2A = 3F. \quad (1)$$

Agora, vamos calcular, de duas maneiras distintas, a soma  $T$  dos ângulos internos dos triângulos que compõem as faces do poliedro  $P$ .

Primeiramente, como todas as faces são triangulares e há exatamente  $F$  faces, a soma dos ângulos internos de todas elas é  $T = \pi F$ ; assim, segue de (1) que  $F = 3F - 2F = 2A - 2F$ , logo,

$$T = (2A - 2F)\pi = 2\pi(A - F). \quad (2)$$

Outra maneira de calcular a soma  $T$  é calcular separadamente a soma  $T_1$  dos ângulos internos dos triângulos iluminados e a soma  $T_2$  dos ângulos internos dos triângulos sombios, fazendo, então,  $T = T_1 + T_2$ .

Como a reta  $\ell$  não é paralela às faces de  $P$ , a projeção ortogonal de uma das faces (triangulares) é ainda um triângulo contido em  $\alpha$ . Logo, a soma  $T_1$  dos ângulos internos das faces iluminadas coincide com a soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais se decompõe a região  $P'$ , projeção de  $P$  sobre  $\alpha$  (veja a figura 4).

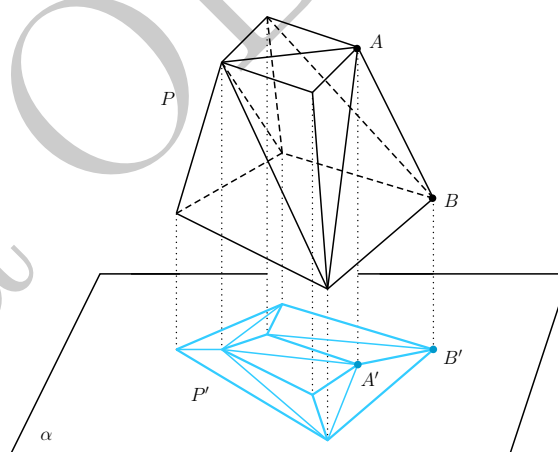


Figura 4: triangulação da parte iluminada de um poliedro e sua projeção sobre o plano  $\alpha$ .

Denotando por  $V_1$  o número de vértices iluminados, por  $V_2$  o número de vértices sombios e por  $V_0$  o número de vértices no contorno aparente de  $P$ , temos  $V = V_0 + V_1 + V_2$ . O número de vértices em  $P'$  é  $V_0 + V_1$ , onde  $V_0$  vértices pertencem ao contorno  $\Gamma'$  de  $P'$  (como é o caso do vértice  $B'$  da figura 4, por exemplo) e  $V_1$  vértices estão no interior de  $P'$  (como, por exemplo, é o caso do vértice  $A'$  na figura 4).

A soma dos ângulos que têm como vértice um vértice interior de  $P'$  (como o vértice  $A'$  na figura 4) é  $2\pi V_1$  para a soma total dos ângulos internos dos triângulos em  $P$ .

A soma dos ângulos que têm vértice em um vértice do contorno de  $P'$  (como os ângulos que têm vértice em  $B'$ ,

na figura 4) coincide com a soma dos ângulos internos do polígono  $\Gamma'$ . Esse polígono tem  $V_0$  vértices, logo, tem  $V_0$  lados. A soma dos ângulos internos de  $\Gamma'$  é, portanto,  $\pi(V_0 - 2)$ .

Assim, a soma  $T_1$  dos ângulos internos dos triângulos que formam as faces iluminadas é

$$T_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

Analogamente,

$$T_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2),$$

de forma que

$$T = T_1 + T_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi = 2\pi(V - 2). \quad (3)$$

Comparando as igualdades (2) e (3), obtemos

$$2\pi(V - 2) = 2\pi(A - F).$$

Por sua vez, após o cancelamento do fator  $\pi$ , essa última igualdade fornece

$$V - A + F = 2,$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

Já exibimos algumas aplicações simples do Teorema de Euler na primeira parte desta aula. Aqui, pois, apresentaremos algumas aplicações não triviais, a começar pelo resultado a seguir, atribuído a R. Descartes.

Em um poliedro convexo, a soma  $S_A$  dos ângulos de faces do poliedro que contornam um dado vértice  $A$  é menor do que  $2\pi$  (esse resultado aparece nos *Elementos* de Euclides, livro XI, Proposição 21). O defeito  $d_A$  do vértice  $A$  é dado pela diferença

$$d_A = 2\pi - S_A.$$

O resultado provado por Descartes foi o seguinte.

**Teorema 3** (Descartes). *Em um poliedro convexo, a soma dos defeitos em todos os vértices é igual a  $4\pi$ .*

**Prova.** Vamos usar a notação  $\sum_A d_A$  para indicar a soma dos defeitos  $d_A$ , onde  $A$  pode ser qualquer um dos vértices do poliedro convexo  $P$ . De acordo com a definição de defeito dada acima, temos

$$\sum_A d_A = \sum_A (2\pi - S_A) = 2\pi V - \sum_A S_A,$$

onde  $V$  é o número de vértices do poliedro  $P$ .

Agora, seja  $F_n$  o número de faces com  $n$  lados. Na parte 1 desta aula (igualdade (2), p.4), vimos que

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots,$$

e que essa soma é claramente finita. Além disso, se  $F$  é o número de faces do poliedro, então

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots,$$

sendo essa soma também finita (igualdade (1), p.4 da parte 1). Essas igualdades podem ser reescritas, usando a notação  $\sum$ , respectivamente como

$$2A = \sum_n nF_n \quad \text{e} \quad F = \sum_n F_n.$$

Da geometria plana, sabemos que a soma dos ângulos internos de uma face com  $n$  lados é igual a  $(n - 2)\pi$  radianos. Com isso, a soma  $\sum_A S_A$  dos ângulos internos de todas as faces do poliedro, pode ser escrita como

$$\sum_A S_A = \sum_n (n - 2)\pi F_n.$$

Isto posto, temos

$$\begin{aligned} \sum_A d_A &= 2\pi V - \sum_A S_A \\ &= 2\pi V - \pi \sum_n nF_n + 2\pi \sum_n F_n \\ &= 2\pi V - \pi(2A) - 2\pi F \\ &= 2\pi(V - A + F) = 4\pi, \end{aligned}$$

sendo a última igualdade consequência da relação de Euler.  $\square$

Outra aplicação não trivial do Teorema de Euler pode ser vista na sugestão de leitura complementar [1], p.378, Exemplo 9.11.

**Observação 4.** *Vale a pena mencionarmos a seguinte demonstração do Teorema 1, da qual apenas esboçaremos uma ideia: em um polígono plano, o número  $V$  de vértices é igual ao número  $A$  de lados (arestas). Dado um poliedro  $P$ , “desmonte-o”, separando todas as suas faces. A ideia é tomar uma face qualquer e remontar o poliedro a partir dessa face. Para uma face qualquer,  $V - A + F = 1$ , pois, como vimos acima,  $V = A$  e, já que há uma só face,  $F = 1$ . Ao “colar” uma nova face, que é um polígono, acrescentamos todos os lados desse polígono, exceto um que é o que coincide com o lado da face preexistente, e acrescentamos também todos os vértices do novo polígono, exceto dois, que coincidem com vértices já existentes na face inicial. Como há uma face a mais, o saldo na expressão  $V - A + F$  é zero; logo, para essa figura com duas faces, ainda temos  $V - A + F = 1$ . Ao acrescentar faces novas, o saldo em  $V - A$  é  $-1$ , pois, a cada aresta que não é contada (por ser compartilhada pela face nova e uma das antigas) correspondem dois vértices que também não são contados. Assim, não há mudança em  $V - A + F$  ao se acrescentar uma face nova, exceto a última, onde  $V$  e  $A$  não mudam e  $F$  aumenta uma unidade.*

## 2 Poliedros regulares

Em um poliedro, cada aresta sempre faz parte de duas faces e tem sempre dois vértices como extremidades. Se, no entanto, olharmos para a relação de incidência entre arestas e vértices, ou arestas e faces, sob o ponto de vista dos vértices ou das faces, não obteremos sempre os mesmos valores.

Mais precisamente, o **grau**  $g(v)$  de um vértice  $v$  é o número de arestas incidentes nesse vértice, ou seja, o número de arestas que têm esse vértice como uma de suas extremidades. Analogamente, para uma face  $f$ , denotamos por  $n(f)$  o número de arestas em que  $f$  incide, isto é, o número de lados do polígono  $f$ .

Dizemos que dois poliedros  $P$  e  $P'$  são **combinatorialmente equivalentes**, se, dado um vértice qualquer  $v$  de  $P$ , existe um único vértice  $v'$  de  $P'$  tal que  $g(v) = g(v')$  e, dada uma face qualquer  $f$  de  $P$ , existe uma única face  $f'$  de  $P'$  tal que  $n(f) = n(f')$ .

A figura 5 exibe dois poliedros que têm os mesmos números de vértices, arestas e faces, mas que não são combinatorialmente equivalentes.

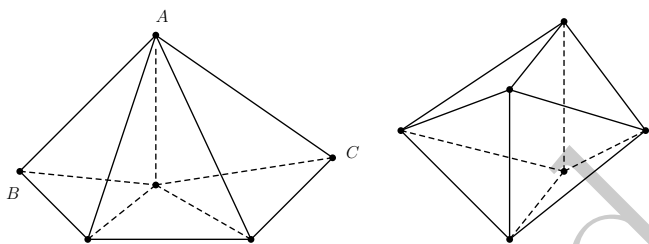


Figura 5: os dois poliedros acima têm  $V = 6$ ,  $A = 12$  e  $F = 8$ , mas não são equivalentes.

Um poliedro convexo é dito **regular** se todas as suas faces são polígonos regulares congruentes entre si, de  $n \geq 3$  lados, e se todos os seus vértices têm um mesmo grau, isto é, se em cada vértice incide um mesmo número  $m \geq 3$  de arestas.

Para um poliedro convexo como no parágrafo anterior, uma vez que cada face tem  $n$  arestas e cada aresta é compartilhada por duas faces, temos  $2A = nF$ . Analogamente, como em cada vértice incidem  $m$  arestas e cada aresta incide em dois vértices, segue que  $2A = mV$ .

Portanto, nas notações dos dois parágrafos anteriores, temos

$$V = \frac{2A}{m} \text{ e } F = \frac{2A}{n}, \quad (4)$$

de sorte que a identidade de Euler,  $V - A + F = 2$ , nos dá

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2.$$

Dividindo essa igualdade por  $2A$ , obtemos:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}. \quad (5)$$

Como  $\frac{1}{A} > 0$ , temos  $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$ . Isso mostra que  $n < 4$  ou  $m < 4$ , pois, do contrário, teríamos  $m \geq 4$  e  $n \geq 4$ , logo,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Assim,  $m = 3$  ou  $n = 3$ .

Substituindo uma das incógnitas por 3 na equação (5), concluímos que os possíveis valores para a outra incógnita são as soluções inteiras positivas da equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}.$$

Resolvendo essa equação em  $x$ , encontramos

$$x = \frac{6A}{A+6} < 6,$$

de sorte que  $x \in \{3, 4, 5\}$ .

Portanto, os possíveis pares ordenados  $(m, n)$  que resolvem a equação (5) são

$$(m, n) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3) \text{ ou } (5, 3).$$

De posse dos possíveis valores para  $m$  e  $n$ , podemos calcular  $A$  a partir de (5) e, então,  $V$  e  $F$  a partir de (4).

A tabela abaixo exibe os valores de  $m$ ,  $n$ ,  $V$ ,  $A$  e  $F$ , e o poliedro correspondente.

Poliedro	$m$	$n$	$V$	$A$	$F$
Tetraedro	3	3	4	6	4
Cubo	3	4	8	12	6
Octaedro	4	3	6	12	8
Dodecaedro	3	5	20	30	12
Icosaedro	5	3	12	30	20

Em princípio, o que fizemos até aqui foi mostrar que não podem existir outros poliedros convexos que não aqueles cujos dados combinatoriais se encontram discriminados na tabela acima. Contudo, cumpre observar que é necessário apresentar, em cada um de tais casos, um argumento que garanta que o poliedro regular em questão realmente existe. Essa tarefa é especialmente não trivial para os casos de dodecaedros e icosaedros regulares, sendo discutida na referência [1].

Aqui, nos contentaremos em apresentar as figuras a seguir, as quais ilustram as cinco classes possíveis de poliedros regulares, os quais são também chamados de **poliedros de Platão**, em referência ao filósofo paradigmático Platão (428 aC - 348 aC), que os estudou.

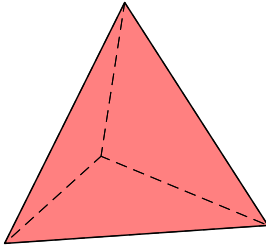


Figura 6: tetraedro.

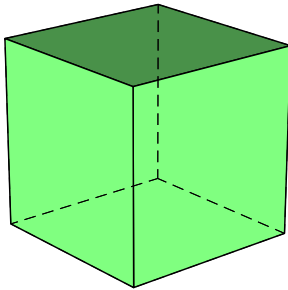


Figura 7: cubo.

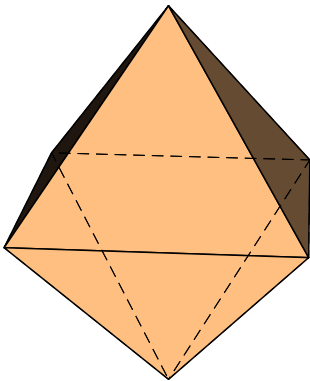


Figura 8: octaedro.

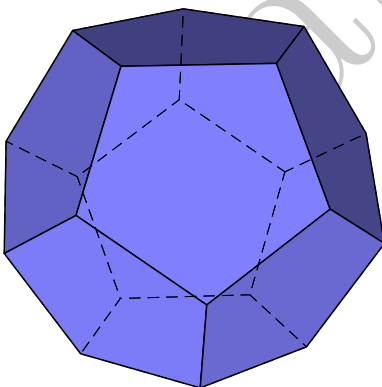


Figura 9: dodecaedro.

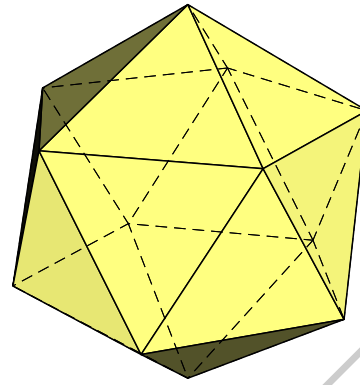


Figura 10: icosaedro.

### Dicas para o Professor

Dois encontros de 50 minutos cada são suficientes para expor a demonstração do Teorema de Euler vista neste texto. Caso você queira discutir de modo mais aprofundado algumas outras demonstrações do Teorema de Euler, deve reservar um pouco mais de tempo para isso. O Teorema de Descartes pode ser apenas enunciado, mas a conexão com o Teorema de Euler só fica clara ao se estudar a demonstração.

Na seção 3 da parte 1 desta aula há algumas aplicações simples do Teorema de Euler. Você pode optar por discutir primeiro as aplicações e depois demonstrar o teorema, ou fazer o contrário.

A prova de que há apenas cinco poliedros regulares pode ser feita em um encontro de 50 minutos, mas você pode explorar muito mais esse fascinante tema. Nas sugestões de leitura complementar [1] e [7] você pode encontrar uma grande quantidade de informações sobre esses sólidos, as relações entre eles e o fascínio que essas figuras exerceram sobre os povos antigos. A referência [8] traz modelos planificados de poliedros que você pode usar para construir belos modelos junto com seus alunos.

### Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2014.
2. C. C. de Sá, J. Rocha (eds.), *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática*, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.
3. R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, New York, Springer, 2000.
4. E. L. Lima, *O Teorema de Euler sobre Poliedros*, Matemática Universitária, 2, pp. 57-74, 1985.
5. Z. Azambuja Filho, *Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos*, Revista do Professor de Matemática, 3, pp 15-17, 1983.

6. R. Courant, H. Robbins, *O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, 2000.
7. J. Martineau (organizador), *Quadrivium*, Editora Realizações, 2014.
8. <http://www.korthalsaltes.com/> (consultado em 24/03/2016).

Portal da OBMEP