Material Teórico - Módulo Trigonometria I

Círculo trigonométrico - Parte 3

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

18 de junho de 2022

Portal da Matemática
OBMEP

1 A relação fundamental da Trigonometria

Para qualquer arco de medida β radianos a seguinte relação, que combina o seno e o cosseno de β, é satisfeita:

$$\operatorname{sen}^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1. \tag{1}$$

Essa é a *relação fundamental da Trigonometria.*

Observação 1. *Note que* $\operatorname{sen}^2(\beta)$ *representa o quadrado do valor do seno de* β*, número que também pode ser escrito como* $(\operatorname{sen}(\beta))^2$*, mas que é diferente do seno de* β^2*, ou seja, de* $\operatorname{sen}(\beta^2)$*. Por exemplo,* $\operatorname{sen}((\sqrt{\pi})^2) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$*, mas* $\operatorname{sen}^2(\sqrt{\pi}) > 0$*, uma vez que* $0 < \sqrt{\pi} < \pi$*.*

Seja $P(x,y)$ o ponto sobre o círculo tal que $\widehat{AP}$ é congruente a β. Vimos (na relação (1) da Parte 2) que $\cos(\beta)$ e $\operatorname{sen}(\beta)$ são, nessa ordem (veja que o cosseno vem primeiro), a abscissa e a ordenada do ponto P sobre o círculo trigonométrico. Ou seja, $P = (x, y) = (\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$.

Traçando a reta vertical que passa por $P(x,y)$ e chamando de Q sua interseção com o eixo horizontal (eixo-x), obtemos um triângulo retângulo OPQ (veja a Figura 1). Observe que, independentemente do quadrante em que se encontra P, esse triângulo possui catetos de medidas $|x|$ e $|y|$ e hipotenusa de comprimento 1. Como $|x|^2 = x^2$ e $|y|^2 = y^2$, o teorema de Pitágoras garante que

$$x^2 + y^2 = 1^2.$$

Mas $x = \cos(\beta)$ e $y = \operatorname{sen}(\beta)$, logo,

$$(\operatorname{sen}(\beta))^2 + (\cos(\beta))^2 = 1,$$

como queríamos demonstrar.

A relação fundamental nos diz que, se conhecermos o valor do cosseno de um arco, então o valor absoluto de seu seno

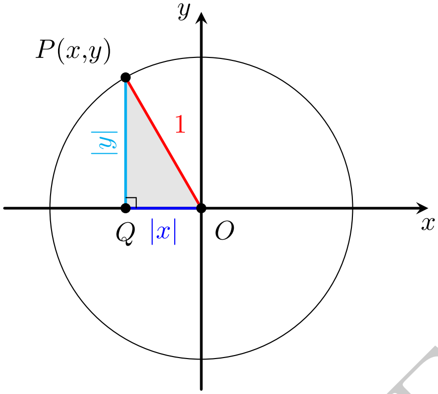


Figura 1: demonstrando a relação fundamental.

está totalmente determinado; se, adicionalmente, soubermos o quadrante do arco, então poderemos encontrar também o sinal de seu seno. Da mesma forma, se conhecermos o seno e o quadrante de um arco, poderemos calcular seu cosseno. Os exemplos a seguir exercitam tal círculo de ideias, bem como algumas variações dele.

Exemplo 2. *Seja α um arco tal que $\pi < \alpha < 3\pi/2$. Sabendo que* $\cos(\alpha) = 0{,}6$*, calcule* $\operatorname{sen}(\alpha)$*.*

Solução 1. Substituindo $\cos(\alpha) = 0{,}6$ na relação fundamental da Trigonometria (ou seja, fazendo $\beta = \alpha$ na equação (1)), temos que:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + (0{,}6)^2 = 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(\alpha) &= 1 - (0{,}6)^2\\ &= 1 - 0{,}36\\ &= 0{,}64.\end{aligned}$$

Uma vez que $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$, a última igualdade acima dá dois possíveis valores para $\operatorname{sen}(\alpha)$:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = 0{,}8 \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}(\alpha) = -0{,}8.$$

Mas o enunciado diz que $\pi < \alpha < 3\pi/2$, ou seja, α está no terceiro quadrante. Com isso, temos que $\text{sen}(\alpha) < 0$, logo, $\text{sen}(\alpha) = -0{,}8$. $\square$

Uma decorrência útil de (1) é a seguinte: suponha que β e β' sejam arcos distintos, tais que $\cos(\beta) = \cos(\beta')$. Então, aplicando a relação fundamental duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} |\text{sen}(\beta)| &= \sqrt{1 - \cos^2(\beta)} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2(\beta')} \\ &= |\text{sen}(\beta')|, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\cos(\beta) = \cos(\beta') \Longrightarrow \text{sen}(\beta) = \pm\,\text{sen}(\beta'). \tag{2}$$

Portanto, se soubermos os sinais de $\text{sen}(\beta)$ e $\text{sen}(\beta')$ (por exemplo, se soubermos os quadrantes aos quais os arcos β e β' pertencem), descobriremos facilmente qual das duas igualdades acima ocorre.

Evidentemente, também vale que

$$\text{sen}(\beta) = \text{sen}(\beta') \Longrightarrow \cos(\beta) = \pm\cos(\beta'),$$

com observações análogas às feitas acima sobre a escolha entre os sinais $+$ ou $-$.

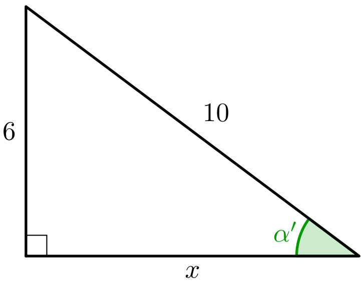
De posse de tais comentários, temos a seguinte solução alternativa para o exemplo anterior.

Solução 2. Construamos um triângulo retângulo que possui um ângulo de medida α', tal que $0 < \alpha' < \pi/2$ e $\cos(\alpha') = 0{,}6$. (Os valores $\cos(\alpha')$, com α' variando no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, preenchem todo o intervalo $(0, 1)$; assim, realmente existe um ângulo α', tal que $0 < \alpha' < \pi/2$ e $\cos(\alpha') = 0{,}6$.)

Como $\cos(\alpha') = 0{,}6 = \frac{6}{10}$, uma maneira de construir tal triângulo é tomar um cateto de medida 6 e a hipotenusa de medida 10 (veja a próxima figura).

Seja x a medida do outro cateto do triângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$x^2 + 6^2 = 10^2 \implies x^2 = 100 - 36 = 64.$$



Como $x > 0$, segue que $x = 8$.

Ainda observando o triângulo, veja que

$$\operatorname{sen}(\alpha') = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Como $\cos(\alpha) = \cos(\alpha')$, aplicando (2) com α e α' no lugar de β e β', obtemos

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \pm 0{,}8.$$

Mas como α está no terceiro quadrante, seu seno é negativo. Logo, $\operatorname{sen}(\alpha) = -0{,}8$. □

Observação 3. *Ao construir o triângulo acima, note que há várias possibilidades para os comprimentos dos catetos; por exemplo, poderíamos ter escolhido* 0,6 *e* 1 *no lugar de* 6 *e* 10*. A escolha que fizemos foi apenas para facilitar os cálculos, uma vez que* 6 *e* 10 *são números inteiros. Outra ótima escolha seria* 3 *e* 5*, o que resultaria no "famoso" triângulo retângulo de lados* 3*,* 4 *e* 5*.*

Um outro tipo de problema-padrão envolvendo a relação fundamental é o descrito pelo exemplo a seguir.

Exemplo 4. *Calcule* $\operatorname{sen}(\beta)$ *e* $\cos(\beta)$*, sabendo que* β *pertence ao segundo quadrante e*

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}\right| = \frac{7}{24}.$$

Solução. Como β pertence ao segundo quadrante, temos $\operatorname{sen}(\beta) > 0$ e $\cos(\beta) < 0$. Portanto, $\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)} < 0$, de sorte que

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)} = -\frac{7}{24}.$$

Então, $\operatorname{sen}(\beta) = -\frac{7}{24}\cos(\beta)$ e, substituindo essa igualdade em (1), obtemos

$$\Big(-\frac{7}{24}\cos(\beta)\Big)^2 + \cos^2(\beta) = 1.$$

Isso é o mesmo que $\left(\frac{7^2+24^2}{24^2}\right)\cos^2(\beta) = 1$, de modo que

$$\cos^2(\beta) = \frac{24^2}{49+576} = \frac{24^2}{625} = \Big(\frac{24}{25}\Big)^2.$$

Como $\cos(\beta) < 0$, temos $\cos(\beta) = -\frac{24}{25}$ e, daí,

$$\operatorname{sen}(\beta) = -\frac{7}{24}\cos(\beta) = -\frac{7}{24}\Big(-\frac{24}{25}\Big) = \frac{7}{25}.$$

□

2 Exercícios

Nesta seção, resolveremos exercícios transversais às três partes desta aula.

Exemplo 5. *Lembre-se de que dois arcos complementares são aqueles cuja soma é igual a $\pi/2$, e suplementares são aqueles cuja soma é igual a π. Sabendo que β e α são complementares e que α e γ são suplementares, com $\cos\gamma \neq 0$, calcule a razão entre $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\gamma$.*

Solução. Como β e α são complementares, temos que $\beta + \alpha = \frac{\pi}{2}$. No Módulo "Círculo Trigonométrico" vimos que isso implica que $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$.

Agora, α e γ satisfazem $\alpha + \gamma = \pi$, de sorte que a relação (2) da Parte 2 fornece $\cos\alpha = -\cos\gamma$. Então, $\operatorname{sen}\beta = -\cos\gamma$ e a razão pedida é igual a

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{-\operatorname{sen}\beta} = -1.$$ □

Exemplo 6. *Sabendo que* $\operatorname{sen}\beta = 3/5$ *e que* β *pertence ao segundo quadrante, calcule os valores de* $\cos\beta$ *e* $\operatorname{tg}\beta$*.*

Solução. Recordemos que, pela relação fundamental, tem-se

$$\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1.$$

Logo,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\beta = 1 \implies \cos^2\beta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

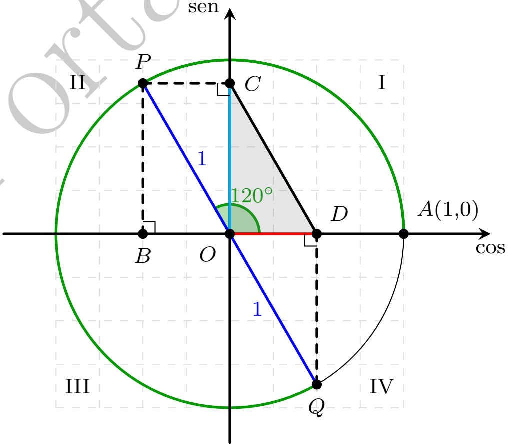
Como β pertence ao segundo quadrante, temos $\cos\beta < 0$. Assim,

$$\cos\beta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Por fim, uma vez que $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$, obtemos

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}. \qquad \square$$

Exemplo 7. *Na figura a seguir, temos um círculo de raio* 1*, com centro em* O*, e sabemos que os pontos* P*,* O *e* Q *são colineares. Sabendo que o arco trigonométrico* $\widehat{AP}$ *mede* $2\pi/3$ *radianos, calcule a área do triângulo* OCD*.*



Solução 1. Inicialmente, observe que $2\pi/3$ radianos correspondem a $120°$. Então, temos

$$\overline{OC} = |\text{sen}(120°)| \quad \text{e} \quad \overline{OB} = |\cos(120°)|.$$

Conforme estudamos na Parte 2 deste material, $|\text{sen}(120°)| = |\text{sen}(60°)|$ e $|\cos(120°)| = |\cos(60°)|$. Assim,

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \overline{OB} = \frac{1}{2}.$$

Como P, O e Q são colineares, temos $P\widehat{O}B = D\widehat{O}Q$, pois são opostos pelo vértice. Consequentemente, seus complementos também são iguais, isto é, $B\widehat{P}O = D\widehat{Q}O$. Mas, como $\overline{PO} = \overline{QO}$, segue que os triângulos OPB e QOD são congruentes, pelo caso "ângulo, lado, ângulo". Logo, $\overline{OD} = \overline{OB}$.

Assim, a área do triângulo OCD é igual a:

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}. \qquad \square$$

Solução 2. Temos $C\widehat{O}P = 120° - 90° = 30°$. Como $\overline{OP} = 1$, observando o triângulo COP temos

$$\overline{PC} = \text{sen}\, 30° \quad \text{e} \quad \overline{OC} = \cos 30°.$$

Logo,

$$\overline{PC} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como na solução anterior, concluímos que os triângulos COP e DOQ são congruentes. Então, $\overline{OD} = \overline{PC}$ e podemos calcular a área de OCD da mesma forma que na primeira solução. $\square$

Exemplo 8. *Sabendo que β, α e γ são os ângulos de um triângulo não retângulo, calcule o valor numérico da expressão*

$$R = \frac{\text{sen}(\beta + \alpha)}{\text{sen}\,\gamma} + \text{tg}(\beta + \alpha + 2\gamma)\,\text{ctg}(\beta + \alpha).$$

Solução. Temos que $\beta + \alpha + \gamma = \pi$. Logo,

$$\operatorname{sen}(\beta + \alpha) = \operatorname{sen}(\pi - \gamma) = \operatorname{sen}\gamma$$

e, daí,

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta + \alpha)}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\gamma} = 1.$$

(Note que $0° < \gamma < 180° \Rightarrow \operatorname{sen}\gamma \neq 0$.)

Por outro lado,

$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha + 2\gamma) = \operatorname{tg}(\pi + \gamma) = \operatorname{tg}\gamma,$$

ao passo que

$$\operatorname{ctg}(\beta + \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi - \gamma)} = \frac{1}{-\operatorname{tg}\gamma}.$$

(Note que os cálculos acima têm sentido, uma vez que $\gamma \neq 90° \Rightarrow \cos\gamma \neq 0$.) Combinando os dois últimos resultados, temos que

$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha + 2\gamma)\operatorname{ctg}(\beta + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{-\operatorname{tg}\gamma} = -1.$$

Então, a expressão do enunciado vale

$$R = 1 - 1 = 0. \qquad \square$$

Exemplo 9. *Calcule x em função de α, sabendo que*

$$x^2 + 2x + \cos^2(\alpha) = 0.$$

Solução. Observe que a expressão do enunciado é uma equação de segundo grau na variável x. Mais precisamente, temos algo da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a = 1$, $b = 2$ e $c = \cos^2(\alpha)$. O discriminante dessa equação é:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cos^2(\alpha) = 4(1 - \cos^2(\alpha)).$$

Pela relação fundamental, temos $1 - \cos^2(\alpha) = \operatorname{sen}^2(\alpha)$, logo,

$$\Delta = 4\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Por fim, de acordo com a fórmula resolutiva da equação de segundo grau (Fórmula de Bháskara):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \alpha}}{2}$$

Veja que $\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \alpha} = 2|\operatorname{sen} \alpha|$. Assim,

$$x = \frac{-2 \pm 2|\operatorname{sen} \alpha|}{2} = 1 \pm |\operatorname{sen} \alpha|.$$

Observe que $|\operatorname{sen} \alpha|$ pode ser igual a $\operatorname{sen} \alpha$ ou $-\operatorname{sen} \alpha$, a depender do quadrante de α. Mas ao calcular x também devemos escolher o sinal "$\pm$" como positivo ou negativo. Assim, de toda forma há dois possíveis valores para x:

$$1 + \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad 1 - \operatorname{sen} \alpha.$$

$\square$

Exemplo 10. *Sejam $x = r \operatorname{sen} \phi \cdot \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \phi \cdot \operatorname{sen} \theta$ e $z = r \cos \phi$ onde $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Assinale a opção que corresponde ao valor de $x^2 + y^2 + z^2$:*

(a) r^2.

(b) $r^2 \operatorname{sen} \theta$.

(c) $r^2 \cos \phi$.

(d) $r^2 \operatorname{sen} \phi$.

(e) $r^2 \cos \theta$.

Solução. A expressão $x^2 + y^2 + z^2$ é igual a:

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cdot \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cdot \operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \cos^2 \phi.$$

Podemos colocar $r^2 \operatorname{sen}^2 \phi$ em evidência nas duas primeiras parcelas, obtendo

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \phi(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + r^2 \cos^2 \phi.$$

Como $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, a expressão anterior pode ser simplificada para

$$r^2 \operatorname{sen}^2\phi + r^2\cos^2\phi.$$

Por sua vez, novamente pela relação fundamental, esta expressão é igual a

$$r^2\left(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi\right) = r^2.$$

Assim, a alternativa correta é (a). $\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja abordado em um ou dois encontros de 50 minutos, a depender do nível de maturidade da turma. Sobre a relação fundamental da trigonometria, os exemplos da primeira seção deste texto e outros mais elaborados também são trabalhados na aula "Relação Fundamental da Trigonometria" do módulo "Círculo Trigonométrico" do primeiro ano do Ensino Médio.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.