Material Teórico - Módulo Quadriláteros

Os Teoremas de Ptolomeu e Hiparco

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de outubro de 2019

Portal da Matemática

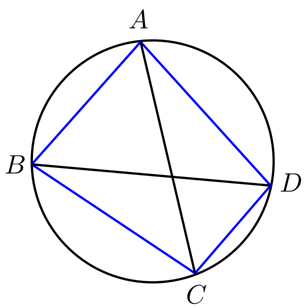
OBMEP

1 O Teorema de Ptolomeu

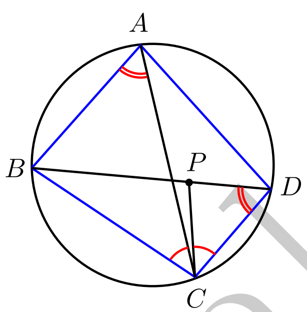
Neste material, daremos prosseguimento ao estudo dos quadriláteros, apresentando mais alguns resultados e aplicações. Iniciamos com o teorema abaixo, devido a Cláudio Ptolomeu, matemático grego que viveu durante o século II.

Teorema 1 (Ptolomeu). *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível, de diagonais AC e BD. Então,*

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}.$$



Prova. Considere o ponto P, sobre a diagonal BD, tal que $P\widehat{C}D=A\widehat{C}B$ (veja a figura a seguir).



Uma vez que $B\widehat{A}C=B\widehat{D}C$ (pois, pelo Teorema do Ângulo Inscrito, ambos medem $\frac{1}{2}\cdot\overset{\frown}{BC}$), os triângulos ABC e DPC são semelhantes, pelo caso AA. Daí, obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DP}}{\overline{CD}},$$

ou seja,

$$\overline{DP}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}}. \qquad (1)$$

Agora, veja que

$$B\widehat{C}P=B\widehat{C}D-P\widehat{C}D=B\widehat{C}D-A\widehat{C}B=A\widehat{C}D.$$

Também (novamente pelo Teorema do Ângulo Inscrito),

$$C\widehat{B}P=C\widehat{B}D=C\widehat{A}D.$$

Assim, os triângulos ACD e BCP também são semelhantes. Desse modo, obtemos

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}},$$

o que implica

$$\overline{BP}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}}. \qquad (2)$$

Observando que $\overline{BD}=\overline{BP}+\overline{PD}$ e somando as equações (1) e (2) membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{BD}&=\overline{BP}+\overline{PD}\\&=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}}\\&=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}}.\end{aligned}$$

Daí, segue que

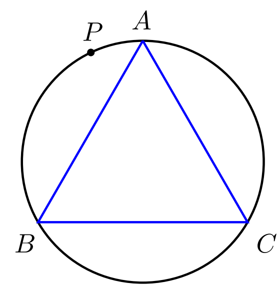
$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{AB}\cdot\overline{CD},$$

conforme desejado. □

Vejamos uma aplicação do teorema de Ptolomeu.

Corolário 2. *Sejam ABC um triângulo equilátero e P um ponto sobre o arco menor $\overset{\frown}{AB}$ do círculo circunscrito a ABC. Então*

$$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PC}.$$



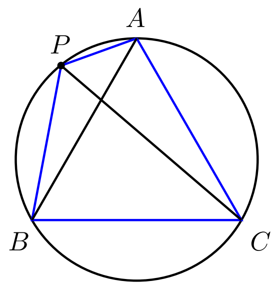
Prova. Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero (inscritível) $APBC$ (veja a próxima figura), obtemos

$$\overline{AB}\cdot\overline{PC}=\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{AC}\cdot\overline{PB}.$$

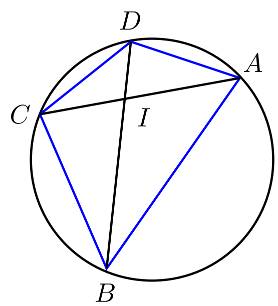
Denotando $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=a$ e substituindo na igualdade acima, segue que

$$a\cdot\overline{PC}=\overline{PA}\cdot a+a\cdot\overline{PB}=a(\overline{PA}+\overline{PB}).$$

Cancelando o fator a de ambos os membros, chegamos por fim a $\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{PB}$, que é a igualdade desejada. □



Exemplo 3. *Na figura abaixo, temos* $\overline{AD} = \overline{CD}$*,* $\overline{AI} = 6$*,* $\overline{BI} = 8$ *e* $\overline{CI} = 4$*. Encontre a medida do lado* AB*.*



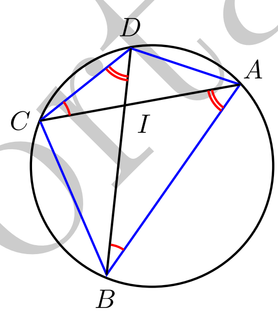
Solução. Inicialmente, note que

$$B\widehat{D}C = B\widehat{A}C = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$$

Mas, como $I\widehat{D}C = B\widehat{D}C$, $B\widehat{A}I = B\widehat{A}C$, temos $I\widehat{D}C = B\widehat{A}I$. Por outro lado, $C\widehat{I}D = B\widehat{I}A$ (pois são ângulos opostos pelo vértice).

Assim, os triângulos IDC e IAB são semelhantes (caso AA – veja a figura a seguir), com razão de semelhança

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{CI}} = \frac{8}{4} = 2.$$



Daí, segue que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = 2,$$

de sorte que

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}.$$

Essa semelhança também nos dá

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{DI}} = 2;$$

então, como $\overline{AI} = 6$, obtemos $\overline{DI} = 3$.

Agora, veja que

$$\overline{AC} = \overline{AI} + \overline{CI} = 6 + 4 = 10$$

e

$$\overline{BD} = \overline{BI} + \overline{DI} = 8 + 3 = 11.$$

Analogamente, também são semelhantes os triângulos IDA e ICB (caso AA), com razão de semelhança

$$\frac{\overline{DI}}{\overline{CI}} = \frac{3}{4}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{3}{4},$$

de modo que

$$\overline{BC} = \frac{4}{3} \cdot \overline{AD}.$$

Portanto, utilizando a hipótese $\overline{AD} = \overline{CD}$, o Teorema de Ptolomeu e as informações colecionadas acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} \\
\Longrightarrow\ & 2 \cdot \overline{CD} \cdot \overline{CD} + \overline{CD} \cdot \frac{4}{3} \cdot \overline{CD} = 10 \cdot 11 \\
\Longrightarrow\ & 2 \cdot \overline{CD}^2 + \frac{4}{3} \cdot \overline{CD}^2 = 10 \cdot 11 \\
\Longrightarrow\ & \left(2 + \frac{4}{3}\right) \cdot \overline{CD}^2 = 10 \cdot 11 \\
\Longrightarrow\ & \frac{\cancel{10}}{3} \cdot \overline{CD}^2 = \cancel{10} \cdot 11 \\
\Longrightarrow\ & \overline{CD}^2 = 33 \\
\Longrightarrow\ & \overline{CD} = \sqrt{33}.
\end{aligned}$$

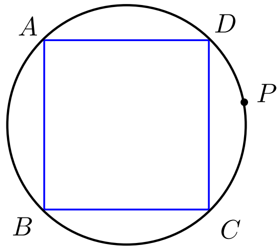
Logo,

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD} = 2\sqrt{33}.$$

□

Exemplo 4. *Sejam* $ABCD$ *um quadrado e* P *um ponto sobre o círculo circunscrito a* $ABCD$ *, situado sobre o arco menor* $\overset{\frown}{CD}$ *(veja a figura a seguir). Prove que o comprimento de pelo menos um dos segmentos* AP*,* BP*,* CP *é um número irracional.*

Solução. Denotando $a = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$, obtemos $\overline{AC} = \overline{BD} = a\sqrt{2}$. Sem perda de generalidade,



podemos supor que $P \neq C, D$. Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero (inscritível) $ABCP$, obtemos

$$\begin{aligned} &\overline{AC} \cdot \overline{BP} = \overline{AP} \cdot \overline{BC} + \overline{CP} \cdot \overline{AB} \\ \Longrightarrow\ &\cancel{a}\sqrt{2} \cdot \overline{BP} = \overline{AP} \cdot \cancel{a} + \overline{CP} \cdot \cancel{a} \\ \Longrightarrow\ &\sqrt{2} = \frac{\overline{AP} + \overline{CP}}{\overline{BP}}. \end{aligned}$$

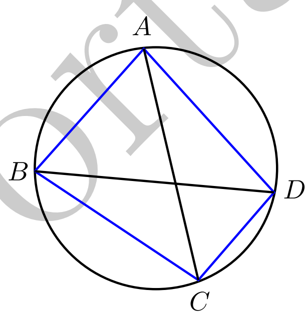
Portanto, se as medidas dos segmentos AP, BP, CP fossem todas dadas por números racionais, então $\sqrt{2}$ seria um número racional, o que não é verdade. Logo, pelo menos uma dessas medidas é um número irracional. □

2 O Teorema de Hiparco

Na seção 1, apresentamos uma fórmula para o *produto* das medidas das diagonais de um quadrilátero inscritível em função das medidas de seus lados. A seguir, demonstraremos o Teorema de Hiparco, o qual provê uma fórmula para o cálculo da *razão* entre as medidas das diagonais de um quadrilátero inscritível em função das medidas dos seus lados.

Teorema 5 (Hiparco)**.** *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD. Então*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DA} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{DA}}.$$



Observe que a expressão do segundo membro não é difícil de recordar: seu numerador é a soma dos produtos dos comprimentos dos lados de $ABCD$ incidentes em A e em C, ao passo que seu denominador é a soma dos produtos dos comprimentos dos lados incidentes em B e em D.

Prova. Sejam $p = \overline{AC}$, $q = \overline{BD}$, $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ e $d = \overline{DA}$. Assim, devemos mostrar que

$$\frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

No módulo “Lei dos Senos e dos Cossenos”, apresentamos uma fórmula para o cálculo da área de um triângulo em função das medidas de seus lados e do raio do círculo circunscrito ao triângulo. Mais precisamente, se x, y e z são as medidas dos lados de um triângulo XYZ e R é o raio de seu círculo circunscrito, então a área do triângulo XYZ é dada por

$$[XYZ] = \frac{xyz}{4R}. \tag{3}$$

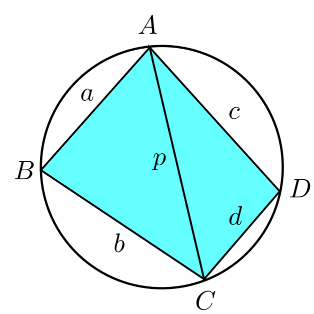
Denotemos por R o raio do círculo circunscrito ao quadrilátero $ABCD$.

Aplicando (3) aos triângulos ABC e ADC (acompanhe na figura abaixo), obtemos

$$[ABC] = \frac{abp}{4R} \quad \text{e} \quad [ADC] = \frac{cdp}{4R}.$$

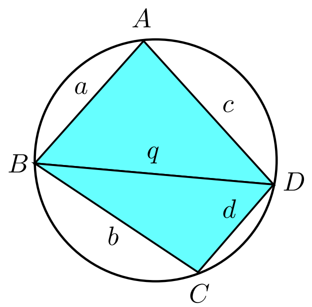
Daí, segue que

$$\begin{aligned} [ABCD] &= [ABC] + [ADC] \\ &= \frac{abp}{4R} + \frac{cdp}{4R} \\ &= \frac{abp + cdp}{4R} \\ &= \frac{p(ab + cd)}{4R}. \end{aligned} \tag{4}$$



Analogamente (acompanhe na próxima figura), temos

$$\begin{aligned} [ABCD] &= [ABD] + [CBD] \\ &= \frac{adq}{4R} + \frac{bcq}{4R} \\ &= \frac{adq + bcq}{4R} \\ &= \frac{q(ad + bc)}{4R}. \end{aligned} \tag{5}$$



Por fim, dividindo membro a membro a equação (4) pela equação (5), segue que

$$1 = \frac{[ABCD]}{[ABCD]} = \frac{\frac{p(ab+cd)}{\cancel{4R}}}{\frac{q(ad+bc)}{\cancel{4R}}} = \frac{p(ab+cd)}{q(ad+bc)}.$$

Então, resolvendo para $\frac{p}{q}$, chegamos a

$$\frac{p}{q} = \frac{ad+bc}{ab+cd},$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 6. *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível de lados $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{AD} = d$ e diagonais $\overline{AC} = p$, $\overline{BD} = q$. Os teoremas de Ptolomeu e Hiparco dão as relações*

$$pq = ac + bd \quad e \quad \frac{p}{q} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Multiplicando-as e dividindo-as membro a membro, obtemos

$$p^2 = (ac+bd)\Big(\frac{ad+bc}{ab+cd}\Big) \quad e \quad q^2 = (ac+bd)\Big(\frac{ab+cd}{ad+bc}\Big)$$

Portanto,

$$p = \sqrt{(ac+bd)\Big(\frac{ad+bc}{ab+cd}\Big)} \quad e \quad q = \sqrt{(ac+bd)\Big(\frac{ab+cd}{ad+bc}\Big)}.$$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor todo o conteúdo deste material. Sugerimos ao professor que, antes de apresentar a demonstração do Teorema de Hiparco, faça uma revisão sobre a Lei dos Senos e a fórmula para o cálculo da área de um triângulo em função das medidas dos seus lados e do raio do círculo circunscrito. Antes da revisão, porém, é interessante dar um tempo para que os alunos tentem recordar essas fórmulas ou até mesmo suas deduções. É importante que as demonstrações sejam apresentadas com todos os detalhes, para que não restem dúvidas.

As referências listadas a seguir trazem outros exemplos e aplicações dos resultados apresentados neste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2012.