Material Teórico - Módulo Sistemas de Numeração e Paridade

Divisibilidade em Diferentes Bases de Numeração

Tópicos Adicionais

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

24 de janeiro de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Divisibilidade em diferentes bases

Em um dos exemplos da aula anterior, mostramos que $(102012)_3$ é um número par. Fizemos isso de dois modos, primeiro encontrando a representação de $(102012)_3$ na base 10 e verificando que essa representação é de fato um número par, e depois notando que se n é um número natural, então 3^n é um número ímpar, o que implica a existência de números inteiros k_2, k_3, k_4 e k_5 tais que $3^5 = 2k_5 + 1$, $3^4 = 2k_4 + 1$, $3^3 = 2k_3 + 1$ e $3^2 = 2k_2 + 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
(102012)_3 &= 1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3 + 2 \\
&= 1 \cdot (2k_5 + 1) + 0 \cdot (2k_4 + 1) + 2 \cdot (2k_3 + 1) \\
&\quad + 0 \cdot (2k_2 + 1) + 1 \cdot (2k_1 + 1) + 2 \\
&= 2k_5 + 4k_3 + 2k_1 + (1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 2) \\
&= 2 \cdot (k_5 + 2k_3 + k_1) + (1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 2) \\
&= 2q + (1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 2).
\end{aligned}$$

Assim, como $2q$ é par, $(102012)_3$ é par se, e somente se, a soma dos algarismos $1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 2$ é par. Como $1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 2 = 6$, concluímos que $(102012)_3$ também é par. Notamos também que o argumento utilizado acima pode ser aplicado a qualquer representação na base 3. De fato, $(a_1 a_2 \ldots a_n)_3$, $a_i \in \mathbb{Z}, \leq a_i \leq 2, \forall i \in \{1{,}2, \ldots ,n\}$, é par se, e somente se, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ é par. Vejamos outro exemplo.

Exemplo 1. *Que condição devemos impor sobre os algarismos a, b e c para que o número $(abc)_6$ seja divisível por 5?*

Solução. Repetindo o último argumento acima, temos que existem inteiros k_1 e k_2 tais que $6^2 = 5k_2 + 1$ e $6^1 = 5k_1 + 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
(abc)_6 &= a \cdot 6^2 + b \cdot 6^1 + c \\
&= a(5k_2 + 1) + b(5k_1 + 1) + c \\
&= 5k_2 a + 5k_1 b + (a + b + c) \\
&= 5(k_2 a + k_1 b) + (a + b + c).
\end{aligned} \tag{1}$$

Uma vez que a diferença entre $(abc)_6$ e $a+b+c$ é $5(k_2a+k_1b)$, que é divisível por 5, temos que (abc) é divisível por 5 se, e somente se, $a+b+c$ é divisível por 5. $\square$

Nos exemplos anteriores, vimos que para qualquer inteiro positivo p dado, existem números inteiros k e q tais que

$$3^p = 2k+1 \text{ e } 6^p = 5q+1.$$

Esse resultado pode ser estendido do seguinte modo: se n e p são inteiros com $p>0$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n^p = (n-1)k+1. \tag{2}$$

Para justificar a fórmula (2), vamos utilizar o desenvolvimento do Binômio de Newton, o qual enunciamos abaixo.

Teorema 2 (Binômio de Newton). *Sejam a e b números reais e p um inteiro positivo. Então*

$$(a+b)^p = \binom{p}{0}a^pb^0 + \binom{p}{1}a^{p-1}b^1 + \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \ldots + \binom{p}{p}a^0b^p.$$

Assim, utilizando o teorema 2 com $a = n-1$ e $b = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} n^p &= [(n-1)+1]^p \\ &= \binom{p}{0}(n-1)^p + \binom{p}{1}(n-1)^{p-1} + \binom{p}{2}(n-1)^{p-2} + \\ &\quad + \ldots + \binom{p}{p-1}(n-1)^1 + \binom{p}{p}(n-1)^0 \\ &= (n-1)\left[\binom{p}{0}(n-1)^{p-1} + \binom{p}{1}(n-1)^{p-2} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{p}{2}(n-1)^{p-3} + \ldots + \binom{p}{p-1}\right] + 1 \\ &= (n-1)k+1, \end{aligned}$$

em que k é igual a

$$\binom{p}{0}(n-1)^{p-1} + \binom{p}{1}(n-1)^{p-2} + \binom{p}{2}(n-1)^{p-3} + \ldots + \binom{p}{p-1}.$$

Relembramos, agora, o critério de divisibilidade por 9.

Proposição 3. *Um número inteiro positivo, escrito na base decimal, é divisível por* 9 *se, e somente se, a soma dos seus algarismos é divisível por* 9.

Demonstração. Seja n um número inteiro positivo. Para simplificar o entendimento, demonstraremos a proposição para o caso em que $n = abcd$, em que a, b, c e d são algarismos na base 10. A ideia para provar o caso geral é a mesma. Desse modo, temos

$$n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d.$$

Mas, de acordo com o desenvolvimento do Binômio de Newton, existem k_3 e k_2 inteiros tais que

$$10^3 = (9+1)^3 = 9k_3 + 1$$

e

$$10^2 = (9+1)^2 = 9k_2 + 1.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} n &= a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \\ &= a(9+1)^3 + b(9+1)^2 + c(9+1) + d \\ &= a\,[9k_3 + 1] + b[[9k_2 + 1] + 9c + c + d \\ &= 9ak_3 + a + 9bk_2 + b + 9c + c + d \\ &= 9\,(ak_3 + bk_2 + c) + (a + b + c + d). \\ &= 9K + (a + b + c + d), \end{aligned}$$

em que $K = ak_3 + bk_2 + c$. Portanto, como $9K$ é divisível por 9, temos que n é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é divisível por 9. □

Mais geralmente, o argumento que utilizamos acima pode ser estendido a qualquer base n do seguinte modo.

Proposição 4. *Sejam* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{(r-1)}, a_r$ *algarismos na base* n*, ou seja,* $0 \le a_i \le n-1$, $\forall i \in \{0{,}1{,}2, \ldots, r\}$. *Então o número* $(a_r a_{(r-1)} \ldots a_2 a_1 a_0)_n$ *é divisível por* $n-1$ *se, e somente se,* $a_r + a_{(r-1)} + \ldots a_2 + a_1 + a_0$ *é divisível por* $n-1$.

Demonstração. Temos que

$(a_r a_{(r-1)} \ldots a_2 a_1 a_0)_n = a_r n^r + a_{(r-1)} n^{r-1} + \ldots + a_2 n^2 a_1 n + a_0.$

Mas para cada $i \in \{0,1,2,\ldots,r\}$ podemos utilizar o desenvolvimento do Binômio de Newton para escrever

$$\begin{aligned} n^i &= [(n-1)+1]^i \\ &= (n-1)^i + i \cdot (n-1)^{i-1} + \ldots i(n-1) + 1 \\ &= (n-1)\left[(n-1)^{i-1} + i(n-1)^{i-2} + \ldots + i\right] + 1 \\ &= k_i(n-1) + 1, \end{aligned}$$

em que $k_i = (n-1)^{i-1} + i(n-1)^{i-2} + \ldots + i \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\begin{aligned} &(a_r a_{(r-1)} \ldots a_2 a_1 a_0)_n = \\ &= a_r n^r + a_{(r-1)} n^{r-1} + \ldots + a_2 n^2 a_1 n + a_0 \\ &= a_r \left[k_r(n-1)+1\right] + a_{(r-1)} \left[k_{(r-1)}(n-1)+1\right] + \\ &\quad + \ldots + a_2 \left[k_2(n-1)+1\right] + a_1 \left[k_1(n-1)+1\right] + a_0 \\ &= a_r k_r (n-1) + a_r + a_{(r-1)} k_{(r-1)}(n-1) + a_{(r-1)} + \\ &\quad + \ldots + a_2 k_2 (n-1) + a_2 + a_1 k_1 (n-1) + a_1 + a_0 \\ &= (n-1)\left[a_r k_r + a_{(r-1)} k_{(r-1)} + \ldots + a_2 k_2 + a_1 k_1\right] + \\ &\quad + \left(a_r + a_{(r-1)} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0\right) \\ &= K(n-1) + \left(a_r + a_{(r-1)} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0\right). \end{aligned}$$

Agora, uma vez que

$$K = a_r k_r + a_{(r-1)} k_{(r-1)} + \ldots + a_2 k_2 + a_1 k_1 \in \mathbb{Z},$$

temos que $K(n-1)$ é divisível por $n-1$. Portanto, concluímos que $(a_r a_{(r-1)} \ldots a_2 a_1 a_0)_n$ é divisível por $n-1$ se, e somente se, a soma dos algarismos $a_r + a_{(r-1)} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$ é divisível por $n-1$. $\square$

Agora, vamos recordar o critério de divisibilidade por 11.

Proposição 5. *Um número n, escrito na base decimal, é divisível por 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos das ordens pares e a soma dos algarismos das ordens ímpares de n é divisível por 11.*

Demonstração. Para simplificar o entendimento, provaremos esse critério para o caso em que n é formado por 4 algarismos. A ideia para provar o caso geral é a mesma. Assim, seja $n = abcd$. Escrevemos

$$\begin{aligned} n &= a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \\ &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= (1001 - 1)a + (99 + 1)b + (11 - 1)c + d \\ &= 1001a - a + 99b + b + 11c - c + d \\ &= 1001a + 99b + 11c + [(b + d) - (a + c)]. \end{aligned}$$

Mas veja que $1001a + 99b + 11c = 11(91a + 9b + c)$, logo, n é múltiplo de 11 se, e somente se, $(b + d) - (a + c)$, ou seja, se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos das ordens pares e a soma dos algarismos das ordens ímpares de n é divisível por 11. □

Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 6. *Mostre que* $(71826)_8$ *é divisível por 9.*

Solução. Temos que $(71727)_8 = 7 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7$ Mas

$$8^4 = (9 - 1)^4 = 9^4 - 4 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 - 4 \cdot 9 + 1 = 9k_1 + 1,$$

$$8^3 = (9 - 1)^3 = 9^3 - 3 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 - 1 = 9k_2 - 1,$$

$$8^2 = (9 - 1)^2 = 9^2 - 2 \cdot 9 + 1 = 9k_3 + 1$$

e

$$8^1 = 9 - 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} (71727)_8 &= 7 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \\ &= 7(9k_1 + 1) + 1(9k_2 - 1) + 7(9k_3 + 1) + 2(9 - 1) + 7 \\ &= 9 \cdot 7k_1 + 7 + 9k_2 - 1 + 9 \cdot 7k_3 + 7 + 9 \cdot 2 - 2 + 7 \\ &= 9(7k_1 + k_2 + 7k_3 + 2) + [(7 + 7 + 7) - (1 + 2)]. \end{aligned}$$

Como a diferença entre $(71727)_8$ e $(7+7+7)-(1+2)$ é $9(7k_1+k_2+7k_3+2)$, que é um múltiplo de 9, temos que $(71727)_8$ é divisível por 9 se, e somente se, $(7+7+7)-(1+2)$ é divisível por 9. Mas $(7+7+7)-(1+2) = 21-3 = 18$ é divisível por 9, logo, $(71727)_8$ é divisível por 9 $\square$

A seguinte proposição generaliza o critério de divisibilidade por 11, assim como o exemplo 6

Proposição 7. *O número $(a_r a_{(r-1)} \ldots a_1 a_0)_n$, representado na base n, é divisível por $n+1$ se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos das ordens ímpares e a soma dos algarismos das ordens pares é divisível por $n+1$.*

Demonstração. Temos

$$(a_r a_{(r-1)} \ldots a_2 a_1 a_0)_n = a_r n^r + a_{(r-1)} n^{r-1} + \ldots + a_2 n^2 a_1 n + a_0.$$

De modo análogo ao que fizemos para mostrar a proposição 4, para cada $i \in \{0,1,2,\ldots,r\}$ podemos utilizar o desenvolvimento do Binômio de Newton para escrever

$$\begin{aligned} n^i &= [(n+1)+(-1)]^i \\ &= (n+1)^i - i \cdot (n+1)^{i-1} + \ldots + (-1)^{i-1} i(n+1) + (-1)^i \\ &= (n+1)\left[(n+1)^{i-1} + i(n+1)^{i-2} + \ldots + (-1)^{i-1} i\right] + \\ &\quad + (-1)^i \\ &= k_i(n+1) + (-1)^i, \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &(a_r a_{(r-1)} \ldots a_2 a_1 a_0)_n = \\ &= a_r n^r + a_{(r-1)} n^{r-1} + \ldots + a_2 n^2 a_1 n + a_0 \\ &= a_r \left[k_r(n+1) + (-1)^r\right] + a_{(r-1)} \left[k_{(r-1)}(n+1) + (-1)^{r-1}\right] + \\ &\quad + \ldots + a_2 \left[k_2(n+1)+1\right] + a_1 \left[k_1(n+1)-1\right] + a_0 \\ &= a_r k_r (n+1) + (-1)^r a_r + a_{(r-1)} k_{(r-1)}(n+1) + \\ &\quad + (-1)^{r-1} a_{(r-1)} + \ldots + a_2 k_2 (n+1) + a_2 + a_1 k_1 (n+1) - \\ &\quad - a_1 + a_0 \end{aligned}$$

$$= (n+1)\left[a_r k_r + a_{(r-1)}k_{(r-1)} + \ldots + a_2k_2 + a_1k_1\right] + \\ + \left((-1)^r a_r + (-1)^{r-1}a_{(r-1)} + \ldots + a_2 - a_1 + a_0\right) \\ = K(n+1) + \left[(-1)^r a_r + (-1)^{r-1}a_{(r-1)} + \ldots + a_2 - a_1 + a_0\right].$$

Agora, note que $(-1)^r a_r + (-1)^{r-1}a_{(r-1)} + \ldots + a_2 - a_1 + a_0$ é a diferença entre a soma dos algarismos das ordens ímpares e a soma dos algarismos das ordens pares. Portanto, concluímos que $(a_r a_{(r-1)} \ldots a_2 a_1 a_0)_n$ é divisível por $n+1$ se, e somente se, diferença entre a soma dos algarismos das ordens ímpares e a soma dos algarismos das ordens pares é divisível por $n+1$. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. É fundamental que os alunos entendam as demonstrações dos critérios de dividibilidade por 9 e 11, pois as respectivas generalizações seguem os mesmos procedimentos. Depois de mostrar as formas mais gerais dos critérios de divisibilidade apresentados nesse material, é importante que o professor proponha exemplos extras em diferentes bases como aplicação desses resultados. Isso contribuirá para que os alunos se familiarizem com os critérios em sua forma mais geral.